Untersuchung einer kinetographischen Verwandtschaft bei speziellen Schleifschiebergetrieben.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation,

vorgelegt von

Karl Hübsch

Assistent an der K. Technischen Hochschule zu München.

Referent:
Prof. Dr. L. Burmester.

Korreferent:
Prof. Dr. H. Burkhardt.

München 1909

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Untersuchung einer kinetographischen Verwandtschaft bei speziellen Schleifschiebergetrieben.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation,

vorgelegt von

Karl Hübsch

Assistent an der K. Technischen Hochschule zu München.

ACAD. ... BIBL.

Referent:
Prof. Dr. L. Burmester.

Korreferent:
Prof. Dr. H. Burkhardt.

München 1909
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555409_0069

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit erhielt ich von Herrn Professor Dr. L. Burmester, dem ich hiefür, wie für die wohlwollende Förderung während der Ausführung meinen aufrichtigsten Dank ausspreche.

§ 1.

Vorbemerkungen über die Verwandtschaft und die ihr zugrunde liegende Bewegung.

Unter einem starren ebenen System verstehen wir die Gesamtheit aller in einer Ebene befindlichen Punkte, deren gegenseitige Lage sich nicht ändert.

Bei einer gesetzmäßigen Bewegung eines starren ebenen Systems S in einem anderen starren ebenen System Σ, welches wir als ruhend betrachten, beschreibt ein angenommener Punk A_s des bewegten Systems S eine Bahnkurve α in dem ruhenden System Σ, und ferner beschreibt ein angenommener Punkt A_σ des ruhenden Systems Σ eine Bahnkurve a in dem bewegten System S.

Wenn wir in dem System S auf einer gegebenen Kurve k_s die Punkte $A_s, B_s, C_s \ldots\ldots$ und in dem System Σ auf einer gegebenen Kurve $\varkappa_\sigma$ eindeutig zugeordnete Punkte $\mathsf{A}_\sigma\ \mathsf{B}_\sigma\ \Gamma_\sigma \ldots\ldots$ annehmen, dann beschreiben die Punkte $A_s, B_s, C_s \ldots\ldots$ des bewegten Systems S die Bahnkurven $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ in dem ruhenden System Σ und die Punkte $\mathsf{A}_\sigma, \mathsf{B}_\sigma, \Gamma_\sigma \ldots\ldots$ des ruhenden Systems Σ die Bahnkurven $a, b, c \ldots\ldots$ in dem bewegten System S. In jedem Bewegungsmoment bestimmen die beschreibenden Punkte $A_s, B_s, C_s \ldots\ldots$ des Systems S auf den zugehörigen Bahnkurven $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ Punkte $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma \ldots\ldots$ in dem System Σ, und ebenso bestimmen die beschreibenden Punkte $\mathsf{A}_\sigma, \mathsf{B}_\sigma, \Gamma_\sigma \ldots\ldots$ des Systems Σ auf den zugehörigen Bahnkurven $a, b, c \ldots\ldots$ Punkte $A, B, C \ldots\ldots$ in dem System S. Die so in jedem Be-

wegungsmoment bestimmten Punkte $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma \ldots\ldots$ und $A, B, C \ldots\ldots$ nennen wir entsprechende Punkte, die beschriebenen Bahnkurven $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ und $a, b, c \ldots\ldots$ entsprechende Kurven in den beiden Systemen Σ und S.

Die hiedurch definierte Beziehung der Systeme Σ, S wird nach Herrn Professor Burmester[1]) eine kinetographische Verwandtschaft zweier ebenen Systeme genannt. Dieselbe ist demnach bestimmt durch eine gegebene gesetzmäßige Bewegung des Systems S in dem System Σ und durch die eindeutige Zuordnung der Punkte auf den in den Systemen S, Σ gegebenen Kurven k_s, $\varkappa_\sigma$.

In dieser Abhandlung soll nun die spezielle kinetographische Verwandtschaft untersucht werden, die sich ergibt, wenn die Bewegung des Systems S in dem ruhenden System Σ dadurch bestimmt wird, daß eine Gerade des Systems S durch einen festen Punkt in dem System Σ gleitet und ein Punkt dieser Geraden sich auf einer Geraden in Σ bewegt; ferner sollen anstatt der beiden Kurven k_s und $\varkappa_\sigma$ zwei in einer speziellen Lage sich deckende Gerade k_s bzw. $\varkappa_\sigma$ angenommen werden, deren identische Punkte die zugeordneten Punkte sind.

Mit der Bewegung des Systems S in bezug auf das System Σ ist auch die Bewegung von Σ in bezug auf S gegeben. Ein starrer rechter Winkel in dem System Σ bewegt sich so, daß ein Punkt des einen Schenkels auf einer festen Geraden des Systems S geführt wird und der andere Schenkel durch einen auf dieser Geraden liegenden Punkt gleitet.

Die Bewegung des Systems S in dem System Σ wird erzeugt durch das zentrisch-geradlinige, die von Σ in bezug auf S durch das zentrisch-winkelige Schleifschiebergetriebe.[2]) Diese beiden Getriebe sind in Fig. 1a bzw. 1b der Tafel I gezeichnet. Die in dem System S gelegenen Punkte und Linien seien für die Folge immer mit lateinischen, die des Systems Σ mit griechischen Buchstaben bezeichnet.

---

[1]) Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. Sitz. Ber. der Akad. der Wissensch., Bd. 37, Heft 1, 1907.

[2]) Burmester, Lehrbuch der Kinematik, S. 333.

Bei dem zentrisch-geradlinigen Schleifschiebergetriebe in Fig. 1a sei $\Lambda\,\Lambda_0 = n$ die Länge des festen Gliedes; die Gerade k des Systems S bewege sich aus der Ausgangslage, in der sie sich mit der Geraden $\Lambda\,\Lambda_0$ deckt, so, daß sie beständig durch den Punkt Λ gleitet und der auf k gelegene Punkt F die Gerade φ beschreibt. Ein beliebiger anderer auf k gelegener Punkt A_0, welcher von F die Entfernung q hat, beschreibt gleichzeitig in dem System Σ eine Konchoide[1]) α_1, deren Gleichung wir leicht aus der Fig. 2 ableiten können.

Wir wählen in dem System Σ den Punkt Λ als Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, dessen ξ-Achse parallel zu der Geraden φ gerichtet ist und dessen η-Achse sich demnach mit der Ausgangslage $\Lambda\,\Lambda_0$ der Geraden k deckt. Hat sich k um den Winkel ϑ gegen die Ausgangslage gedreht, so ist der beschreibende Punkt A_0 mit einem Punkt A des Systems Σ zur Deckung gekommen. Sind ξ und η die Koordinaten dieses Punktes A, so läßt sich aus des Figur folgende Beziehung ersehen:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = q + \frac{n}{\cos\vartheta}$$

oder, wenn wir $\cos\vartheta = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$ setzen,

$$1) \qquad (\xi^2 + \eta^2)\,(\eta - n)^2 - q^2\,\eta^2 = 0.$$

Die Gleichung 1) stellt die Konchoide α dar. Dieselbe hat demnach die Gerade φ als Asymptote und den Punkt Λ als Doppelpunkt. Der den Doppelpunkt enthaltende Zweig α_2 der Konchoide wird von dem zu A_0 in bezug auf F symmetrischen Punkte A_0' der Geraden k beschrieben.

Bei dem in Fig. 1b gezeichneten zentrisch-winkeligen Schleifschiebergetriebe, welches die Bewegung des Systems Σ in bezug auf S darstellt, haben wir uns in umgekehrter Weise wie in Fig. 1a die Gerade k in ihrer Ausgangslage als fest und den Winkelhaken $\Lambda\,\Lambda_0\,\Xi$ als beweglich zu denken; der Punkt

[1]) Loria, Ebene Kurven, 1902, S. 128.

Λ beschreibt die Gerade k, und der unbegrenzt lange Schenkel $\Lambda_0 \Xi$ des Winkelhakens gleitet durch den auf k gelegenen Punkt F. Dabei beschreibt zunächst der Scheitel Λ_0 des beweglichen rechten Winkels $\Lambda \Lambda_0 \Xi$ eine Gutschovensche Kappakurve[1]) l, deren Gleichung sich in folgender Weise aus Fig. 2 ergibt: Wir wählen den Punkt F als Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, dessen x-Achse senkrecht zu k gerichtet ist und dessen y-Achse sich demnach mit der Geraden k deckt. In der Ausgangslage fällt der Schenkel $\Lambda \Lambda_0$ des Winkelhakens in die y-Achse; hat sich derselbe dann so weit bewegt, daß $(\Lambda)(\Lambda_0)$ mit der y-Achse den Winkel ϑ bildet, so deckt sich (Λ_0) mit einem Punkte L, für dessen Koordinaten x und y folgende Beziehung gilt:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{n} = \frac{y}{x}$$

oder

$$2) \qquad x^2 (x^2 + y^2) - n^2 y^2 = 0.$$

Die Gleichung 2) stellt die von Λ_0 beschriebene Kappakurve l dar. Dieselbe verläuft symmetrisch zu beiden Koordinatenachsen, hat im Ursprung einen Selbstberührungspunkt und besitzt als Asymptoten die beiden Geraden $x = n$ und $x = -n$.

Ein beliebiger anderer auf dem Schenkel $\Lambda \Lambda_0$ des Winkelhakens gelegener Punkt Λ_0, welcher von Λ_0 die Entfernung q hat, beschreibt in dem System S eine Kurve a. In der durch den Winkel ϑ bezeichneten Lage ist Λ_0 mit einem Punkte A zur Deckung gekommen, und für die Koordinaten x, y dieses Punktes A ergeben sich folgende Gleichungen:

$$x = (n + q) \sin \vartheta$$

$$y = (n + q) \cos \vartheta - \frac{n}{\cos \vartheta}.$$

Die Elimination von ϑ aus diesen zwei Gleichungen liefert folgende Gleichung der Kurve a:

$$y^2 [(n + q)^2 - x^2] - (q^2 + nq - x^2)^2 = 0.$$

---

[1]) Loria, a. a. O., S. 182.

Die Kurve a wollen wir nach Wieleitner[1]) als Orthokonchoide der Kappakurve bezeichnen. Dieselbe unterscheidet sich von der Kappakurve l dadurch, daß sie anstatt des Selbstberührungspunktes zwei auf der y-Achse gelegene Scheitel besitzt und die zu den Asymptoten von l im Abstand q parallelen Geraden als Asymptoten hat. Wird der Abstand q von dem Scheitel des Winkelhakens aus nach der entgegengesetzten Seite abgetragen, so erhalten wir als beschreibenden Punkt den Punkt A_0' und als Bahn die durch die Gleichung

$$3) \qquad y^2[(n-q)^2 - x^2] - (q^2 - nq - x^2)^2 = 0$$

dargestellte Kurve a', welche mit a die Scheitel gemeinsam und als Asymptoten die beiden Geraden $x = +(n-q)$ hat.

In Fig. 2 sind die in S befindlichen Bahnkurven a und a' mit ihren Zweigen a_1 und a_2, bzw. a_1' und a_2', sowie die in Σ liegende Konchoide α mit ihren Zweigen α_1 und α_2 gezeichnet. Während die Punkte A_0 und A_0' die Zweige α_1, bzw. α_2 der Konchoide beschreiben, bewegen sich A_0 und A_0' auf den Zweigen a_1, bzw. a_1' der beiden Kurven a und a'. Die beiden anderen Zweige a_2 und a_2' dieser letzteren würden einer zu der Konchoide α in bezug auf die Gerade φ symmetrischen Konchoide α' entsprechen.

Bevor wir nun zu der Betrachtung der Verwandtschaft übergehen, sei noch auf eine andere Art der Erzeugung der beiden soeben besprochenen speziellen Schleifschiebergetriebe hingewiesen.[2])

Nehmen wir wieder wie oben die Gerade k des Systems S in Fig. 3 in der durch den Winkel ϑ bezeichneten Lage an, so ist der Schnittpunkt der in Λ auf k und in F auf φ errichteten Senkrechten der Pol[3]) Π der Bewegung. Ebenso ist für die Bewegung des Winkelhakens $(\Lambda)(\Lambda_0)\,\Xi$ in dem System S der Schnittpunkt der in dem festen Punkt (F) auf $(\Lambda_0)\,\Xi$ und in (Λ) auf die feste Gerade (k) errichteten Senkrechten der Pol P der Bewegung. Die für die verschiedenen Bewegungs-

---

[1]) Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, 1908, S. 75.

[2]) Siehe auch Wieleitner, a. a. O., S. 70

[3]) Burmester, a. a. O., S. 20.

momente sich ergebenden Punkte P und Π erfüllen die Polbahnen p bzw. π der beiden Systeme S und Σ. Nach dem Prinzip der Umkehrung der Bewegung[1]) kann nun die Bewegung des einen der beiden Systeme in dem anderen erzeugt werden durch das Rollen der in diesem System befindlichen Polbahn auf der in dem anderen System liegenden; die in dem bewegten System befindliche wird Laufpolbahn, die andere Rastpolbahn genannt.

Verwenden wir wieder in jedem der beiden Systeme das schon oben benützte Koordinatensystem, und sind x und y die laufenden Koordinaten eines Punktes P der Polbahn p, ξ und η die eines Punktes Π der Polbahn π, so ergibt die Konstruktion der beiden Pole folgende Beziehungen:

In dem rechtwinkeligen Dreieck $\Pi \wedge F$ ist $\xi^2 = n \cdot \eta$.

„ „ „ „ $P(\wedge)(F)$ ist $y^2 = n \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$.

Folglich ist die Polbahn π die Parabel mit der Gleichung:

$$\xi^2 = -\,n \cdot \eta,$$

die Polbahn p ist eine Kampyla[2]) mit der Gleichung:

$$n^2 (x^2 + y^2) = y^4.$$

Für die Bewegung des Systems S in dem System Σ ist p Laufpolbahn und π Rastpolbahn; für die Bewegung von Σ in S ist es umgekehrt. Wir erhalten demnach folgende Erzeugung dieser beiden Bewegungen:

Rollt die Kampyla p auf der Parabel π, so beschreibt ein beliebiger Punkt der Hauptachse der Kampyla eine Konchoide; der Mittelpunkt der Kampyla bewegt sich auf der Geraden φ, während die Hauptachse durch den Punkt $\wedge$ gleitet.

Rollt die Parabel π auf der Kampyla p, so beschreibt ein beliebiger Punkt der Achse der Parabel eine Kurve a, die wir als Orthokonchoide der Kappakurve bezeichnet haben; der Scheitel der Parabel bewegt sich auf der Geraden (k), während

[1]) Burmester, a. a. O., S. 32.

[2]) Loria, a. a. O., S. 321.

die zur Scheiteltangente im Abstand n parallele Gerade φ durch den Punkt (F) gleitet.

Nach diesen Erörterungen über die der Verwandtschaft zugrunde liegenden Bewegungen wollen wir nun zu der eigentlichen Untersuchung der Verwandtschaft übergehen.

Wie schon eingangs erwähnt, wählen wir als zugeordnete Punkte die identischen Punkte zweier in einer speziellen Lage sich deckenden Geraden k_s und $\varkappa_\sigma$, und zwar seien als solche die beiden in der Anfangslage koinzidierenden Geraden genommen, welche durch die beiden festen Punkte Λ und F der beiden Systeme gehen. In Fig. 2 sind also die beschreibenden Punkte A_0 und A_0, sowie A_0' und A_0' zugeordnete Punkte der Verwandtschaft. Während der Bewegung von S beschreiben die Punkte $A_0, B_0, C_0 \ldots\ldots$ der Geraden k_s die Bahnkurven $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$, und die Gerade k_s gelangt aus der Anfangslage $\varkappa_0 (\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0, \mathsf{\Gamma}_0 \ldots\ldots)$ in die verschiedenen Lagen $\varkappa_1 (\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \mathsf{\Gamma}_1 \ldots\ldots)$, $\varkappa_2 (\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2, \mathsf{\Gamma}_2 \ldots\ldots) \ldots\ldots$, die Lagengeraden des Systems Σ. Bei der Bewegung von Σ beschreiben die Punkte $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0, \mathsf{\Gamma}_0 \ldots\ldots$ der Geraden $\varkappa_\sigma$ die Bahnkurven $a, b, c \ldots\ldots$, und die Gerade $\varkappa_\sigma$ gelangt aus der Aufangslage k_0 $(A_0, B_0, C_0 \ldots\ldots)$ in die Lagen k_1 $(A_1, B_1, C_1 \ldots\ldots)$, k_2 $(A_2, B_2, C_2 \ldots\ldots) \ldots\ldots$, die Lagengeraden des Systems S. Für diese vier Kurvenscharen ergibt sich nach den vorausgegangenen Erörterungen folgendes:

Die Schar $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ der Bahnkurven in dem System Σ besteht aus unendlich vielen Konchoiden, welche die Gerade φ als Asymptote und den Punkt Λ als Doppelpunkt gemeinsam haben. Der letztere ist je nach der Lage des beschreibenden Punktes ein reeller Doppelpunkt, ein isolierter Punkt oder eine Spitze. Die Gerade φ selbst ist eine spezielle Kurve der Schar.

Die Schar der Bahnkurven $a, b, c \ldots\ldots$ in dem System S besteht aus unendlich vielen Orthokonchoiden der Kappakurve. Dieselben haben die feste Gerade k als Symmetrallinie und den festen Punkt F als Mittelpunkt gemeinsam. Spezielle Bahnkurven der Schar sind die Kappakurve und die Trisekante,[1]) welche sich für $q = 0$ bzw. $q = n$ ergeben.

[1]) Loria, a. a. O., S. 215.

Die Lagengeraden $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots\ldots$ in dem System Σ sind die Geraden eines Strahlenbüschels mit dem Mittelpunkt Λ.

Die Lagengeraden $k_0, k_1, k_2 \ldots\ldots$ in dem System S sind Gerade von der Eigenschaft, daß das Stück derselben zwischen dem Schnittpunkt mit der Geraden k und dem Fußpunkt des von F auf sie gefällten Lotes stets die konstante Länge n hat. Die Geraden dieser Schar haben eine Hüllbahnkurve h, deren Gleichung wir nun ableiten wollen. Für die in Fig. 2 gezeichnete Lage des Winkelhakens $(\Lambda)(\Lambda_1)\Xi$ ist $(\Lambda)(\Lambda_0)$ eine Gerade k_1 dieser Schar; ist ϑ der Winkel von k_1 mit der Geraden k, so hat k_1 in dem Koordinatensystem $x\,y$ die Gleichung:

$$x \cdot \frac{\cos\vartheta}{n \operatorname{tg}\vartheta} - y \cdot \frac{\cos\vartheta}{n} = 1.$$

Wird in diese Gleichung $\cos\vartheta = \mu$ als Porameter der Geradenschar eingeführt, so lautet dieselbe:

$$T = (x^2 + y^2)\,\mu^4 + 2\,n\,y\,\mu^3 + (n^2 - y^2)\,\mu^2 - 2\,n\,y\,\mu - n^2 = 0.$$

Setzen wir $\mu = \mu_1 : \mu_2$ und $T \cdot \mu_2^4 = T'$, so werden die beiden abgeleiteten Gleichungen:

$$\frac{\partial T'}{\partial \mu_1} = 4\,(x^2+y^2)\,\mu_1^3 + 6\,n\,y\,\mu_1^2\mu_2 + 2\,(n^2 - y^2)\,\mu_1\mu_2^2 \quad 2\,n\,y\,\mu_2^3 = 0$$

und

$$\frac{\partial T'}{\partial \mu_2} = 2\,n\,y\,\mu_1^3 + 2\,(n^2 - y^2)\,\mu_1^2\mu_2 - 6\,n\,y\,\mu_1\mu_2^2 - 4\,n^2\mu_2^3 = 0$$

homogen in μ_1 und μ_2, und die Elimination von μ aus diesen beiden Gleichungen liefert folgende Gleichung der Hüllbahnkurve h

$$\begin{vmatrix} 4(x^2+y^2) & 6ny & 2(n^2-y^2) & -2ny & 0 & 0 \\ 0 & 4(x^2+y^2) & 6ny & 2(n^2-y^2) & -2ny & 0 \\ 0 & 0 & 4(x^2+y^2) & 6ny & 2(n^2-y^2) & -2ny \\ 2ny & 2(n^2-y^2) & -6ny & -4n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2ny & 2(n^2-y^2) & -6ny & -4n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2ny & 2(n^2-y^2) & -6ny & -4n^2 \end{vmatrix} = 0$$

und nach Ausrechnung dieser Determinante:

$$4) \quad (n^2 - y^2)^3 + 3x^2(2n^2 + y^2)^2 - 4x^2(n^2 - y^2)^2 + 16\,n^2x^4 = 0.$$

Die Kurve h ist von der sechsten Ordnung und verläuft symmetrisch zu den Koordinatenachsen; die Transformation der Gleichung 4) auf ein neues Koordinatensystem $x' = x$, $y' = y \mp n$ läßt uns ersehen, daß die Kurve auf der y-Achse in den Punkten $y = +n$ und $y = -n$ Spitzen hat. Die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten erfüllen die Gleichung $y^4 (x^2 + y^2) = 0$. Die Kurve geht also durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene; ferner liefert die Untersuchung mit Hilfe des Cramerschen Polygons als krummlinige Asymptoten die beiden Parabeln $y^2 = 4nx$ und $y^2 = -4nx$, und demnach wird die Kurve von der unendlich fernen Geraden doppelt berührt. Von einem beliebigen Punkt der Ebene aus gehen vier Tangenten an die Kurve h; zwei von diesen fallen zusammen oder werden imaginär, wenn der Punkt auf der Kurve selbst bzw. in dem von der Kurve begrenzten Teil der Ebene liegt, der die x-Achse enthält.

Die Konstruktion der Kurve h ergibt sich aus ihrer Eigenschaft als Enveloppe der Geradenschar k_0, k_1, k_2 ..... In der in Fig. 2 gezeichneten Lage des Winkelhakens $(\Lambda)(\Lambda_0)\,\Xi$ deckt sich der Schenkel $(\Lambda)(\Lambda_0)$ mit einer Geraden dieser Schar; der Berührpunkt B dieser Geraden mit der Kurve h wird erhalten als Fußpunkt der von dem Pol P auf die Gerade gefällten Senkrechten.

§ 2.

Die Gleichungen der Verwandtschaft.

In Fig. 4 seien wieder die in S und Σ gewählten Koordinatensysteme xy bzw. $\xi\eta$ in der Ausgangslage gezeichnet, in welcher die y-Achse sich mit der η-Achse und der beschreibende Punkt A_0 des Systems S sich mit dem ihm zugeordneten Punkt A_0 in Σ deckt. Hat sich die Gerade k des Systems S um den Winkel ϑ gegen die Ausgangslage nach k_ϑ gedreht, so ist A_0 nach $A_{0,\vartheta}$, der Koordinatenanfangspunkt O nach O_ϑ und das Achsenkreuz $x\,y$ in die Lage $x_\vartheta\,y_\vartheta$ gekommen. $A_{0,\vartheta}$ deckt sich mit einem Punkt A des Systems Σ,

und der Punkt A_0 des als ruhend gedachten Systems Σ koinzidiert mit einem Punkt A des Systems S. Die Punkte A und A sind entsprechende Punkte der kinetographischen Verwandtschaft. Die Lage des Punktes A_0 sei wieder wie in Fig. 2 durch den Abstand $A_0\,O = q$ gegeben. Sind $A\,A_y = x$ und $A\,A_x = y$ die Koordinaten des Punktes A in dem Koordinatensystem $x_0\,y_0$, ferner $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_\eta = \xi$ und $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_\xi = \eta$, diejenigen des Punktes A in dem System $\xi\eta$, so ergeben sich die folgenden Gleichungen der Verwandtschaft der Systeme S und Σ:

$$5) \qquad \begin{cases} x = (n+q)\sin\vartheta \\ y = (n+q)\cos\vartheta - \dfrac{n}{\cos\vartheta} \end{cases}$$

$$6) \qquad \begin{cases} \xi = n\,\mathrm{tg}\,\vartheta + q\sin\vartheta \\ \eta = n + q\cdot\cos\vartheta. \end{cases}$$

Führen wir in die Gleichungen 6) statt der rechtwinkeligen Koordinaten ξ und η Polarkoordinaten ϱ und ψ ein, so lauten dieselben:

$$6') \qquad \begin{cases} \varrho = q + \dfrac{n}{\cos\vartheta} \\ \psi = 90^0 - \vartheta. \end{cases}$$

In den Gleichungen 5) und 6) treten die Größen q und ϑ als Parameter auf; die eigentlichen oder reduzierten Gleichungen der Verwandtschaft erhalten wir durch Elimination dieser Parameter aus 5) und 6). Aus den Gleichungen 6) folgt:

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{\xi}{\eta},\ \text{daher}\ \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2}},\ \sin\vartheta = \frac{\frac{\xi}{\eta}}{\sqrt{1+\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2}}$$

und

$$q = \sqrt{\xi^2+\eta^2} - n\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2} = \frac{\eta-n}{\eta}\cdot\sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichungen 5) ein, so ergeben sich für den Übergang aus dem System Σ zu dem System S die folgenden reduzierten Gleichungen der Verwandtschaft:

$$7) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\xi}{\eta \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} [n\eta + (\eta - n)\sqrt{\xi^2 + \eta^2}] \\ y = \dfrac{1}{\eta \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} [\eta(\eta - n)\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - n \cdot \xi^2]. \end{cases}$$

Für den Übergang aus dem System S zu dem System Σ führt jedoch die Elimination der Parameter auf eine Gleichung vierten Grades für q, und infolgedessen gelingt es nicht, die reduzierten Gleichungen aufzustellen.

Zunächst wollen wir aus den Gleichungen 5) und 6) ableiten, daß die Scharen der Bahnkurven und der Lagengeraden der beiden Systeme S und Σ als Parameterlinien auftreten.

Aus den Gleichungen 5) ergibt sich durch Elimination von ϑ die Gleichung:

$$y^2[(n+q)^2 - x^2] = (q^2 + nq - x^2)^2,$$

das ist die Schar der Bahnkurven a, b, c . . . . ., durch Elimination von q die Gleichung:

$$\frac{\cos\vartheta}{n\,\mathrm{tg}\,\vartheta} \cdot x - \frac{\cos\vartheta}{n} \cdot y = 1,$$

welche die Geradenschar k_0, k_1, k_2 . . . . . darstellt.

In analoger Weise liefern die Gleichungen 6) nach Elimination von ϑ bzw. q die Parameterkurven:

$$(\eta - n)^2 \cdot (\xi^2 + \eta^2) = q^2 \cdot \eta^2$$

und

$$\xi = \eta \cdot \mathrm{tg}\,\vartheta,$$

also die Schar der Konchoiden α, β, γ . . . . . und das Strahlenbüschel $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ . . . . .

Ferner können wir aus den Gleichungen der Verwandtschaft ersehen, wieviel Punkte in dem einen System einem Punkt des anderen Systems entsprechen.

Zu einem durch seine Koordinaten ξ und η gegebenen Punkt A des Systems Σ liefern uns die Gleichungen 7), entsprechend dem doppelten Vorzeichen des Ausdruckes $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, zwei Wertepaare x, y; demnach folgt der Satz:

Einem Punkt A des Systems Σ entsprechen zwei Punkte A_1 und A_2 des Systems S.

Nun sei umgekehrt ein Punkt A des Systems S durch seine Koordinaten x und y gegeben. Die Gleichungen 5) liefern nach Elimination von ϑ folgende Gleichung in q:

$$8) \qquad q^4 + 2nq^3 - (2x^2 + y^2 - n^2)q^2 - 2(x^2 + y^2)nq + x^2(x^2 + y^2) - n^2y^2 = 0.$$

Zu den vier Werten q_1, q_2, q_3 und q_4, welche der Gleichung 8) genügen, gehören vier Werte von ϑ, und zu jedem Wertepaar q, ϑ liefern die Gleichungen 6) ein Wertepaar ξ, η. Demnach ergibt sich der Satz:

Einem Punkt A des Systems S entsprechen vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 des Systems Σ.

Wir erhalten mithin folgendes wichtige Ergebnis:

Die Systeme Σ und S stehen in einer zwei—vierdeutigen kinetographischen Verwandtschaft.

Die vier Werte q_1, q_2, q_3, q_4 sind die Abschnitte der von dem Punkte A an die Hüllbahnkurve h gehenden Tangenten, gemessen von A bis zu dem Scheitel des Winkelhakens, also bis zu dem Fußpunkt des von O auf die Tangente gefällten Lotes. Liegt dieser Fußpunkt zwischen dem Punkt A und der y-Achse, so ist der Tangentenabschnitt q positiv, im entgegengesetzten Fall ist er negativ in Rechnung zu bringen. Der jedem Tangentenabschnitt q entsprechende Winkel ϑ ist der im Sinne des Uhrzeigers gemessene Winkel zwischen der positiven y-Achse und der von der y-Achse nach dem Scheitel des Winkelhakens gerechneten Richtung.

§ 3.

Ausgezeichnete Punkte in den beiden Systemen S und Σ.

Wir wollen nun solche spezielle Punkte ermitteln, denen weniger als zwei bzw. vier Punkte des anderen Systems entsprechen, ferner diejenigen Punkte, deren zugeordnete sich in speziellen Lagen befinden.

Von den vier Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 in dem System Σ, die einem Punkt A des Systems S entsprechen, sind zwei imaginär, wenn zwei von A an die Kurve h gehende Tangenten imaginär werden, wenn also, was bereits im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, der Punkt A in dem von der Kurve h begrenzten Teil der Ebene liegt, der die x-Achse enthält. Für einen auf der Kurve h gelegenen Punkt fallen zwei Tangenten, mithin auch zwei zugeordnete Punkte zusammen; einem solchen Punkt entsprechen also nur drei Punkte des Systems Σ. Außerdem fallen auch für einen auf der y-Achse gelegenen Punkt $x = o$, $y = c$ zwei von den vier Wurzeln der Gleichung 8) zusammen in $q_1 = q_2 = -n$; die beiden anderen sind $q_3 = +c$, $q_4 = -c$. Zu diesen vier Werten von q berechnen sich aus den Gleichungen 5) folgende Werte von ϑ:

$$\vartheta_1 = \arccos\left(-\frac{n}{c}\right);\ \vartheta_2 = 360^0 - \arccos\left(-\frac{n}{c}\right);\ \vartheta_3 = 0;\ \vartheta_4 = 180^0.$$

Zu diesen vier Wertepaaren q, ϑ liefern die Gleichungen 6) nur drei verschiedene Wertepaare von ξ und η, nämlich:

$$\xi_1 = o,\ \eta_1 = c + n;$$

$$\xi_2 = -(c+n)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{n}{c}\right)^2},\ \eta_2 = (c+n)\cdot\frac{n}{c};$$

$$\xi_3 = (c+n)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{n}{c}\right)^2},\ \eta_3 = (c+n)\cdot\frac{n}{c}.$$

Somit ergibt sich folgender Satz:

Einem auf der y-Achse gelegenen Punkt des Systems S entsprechen nur drei Punkte des Systems Σ, von denen einer auf der η-Achse, die beiden anderen symmetrisch zu derselben liegen.

Zu einem auf der x-Achse befindlichen Punkt $x = c$, $y = 0$ ergeben die Gleichungen der Verwandtschaft vier Punkte des Systems Σ, von denen je zwei symmetrisch zur η-Achse liegen.

Für einige spezielle Punkte auf der y-Achse fallen sämtliche vier entsprechenden Punkte des Systems Σ zusammen. Berechnen wir für den Koordinatenanfangspunkt $x = 0$, $y = 0$ die Parameterwerte q und ϑ und setzen wir dieselben in die Gleichungen 6) ein, so ergibt sich nur ein entsprechender Punkt

$\xi = 0$, $\eta = n$ in dem System Σ. Ebenso entspricht dem Punkt $x = 0$, $y = n$ nur der eine Punkt $\xi = 0$, $\eta = 2n$ und dem Punkt $x = 0$, $y = -n$ der Punkt $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Von dem unendlich fernen Punkt $x = \infty$, $y = mx$ in dem System S gehen nur zwei reelle Tangenten an die Kurve h; da dieselben parallel sind, so sind die zugehörigen Winkel ϑ um 180° voneinander verschieden, und die Tangentenabschnitte sind $q = \pm\infty$. Die Gleichungen 6) ergeben in dem System Σ den einen entsprechenden Punkt $\xi = \infty$, $\eta = m \cdot \xi$. Somit folgt:

Einem unendlich fernen Punkt des Systems S entsprechen in Σ nur drei Punkte, nämlich der unendlich ferne Punkt derselben Richtung und außerdem zwei imaginäre Punkte.

Ausgezeichnete Punkte in dem System Σ sind diejenigen, für welche die beiden zugeordneten Punkte des Systems S zusammenfallen. Die Gleichungen 7) ergeben zu dem Punkt $\xi = 0$, $\eta = \text{const} = c$, den einen Punkt $x = 0$, $y = c - n$. Mithin folgt:

Einem auf der η-Achse liegenden Punkt des Systems Σ entspricht doppelt ein Punkt der y-Achse in dem System S.

Für einen unendlich fernen Punkt des Systems Σ, der durch die Koordinaten $\xi = \infty$, $\eta = m\xi$ gegeben ist, liefern die Gleichungen 7) folgende Grenzwerte:

$$\lim_{\substack{\xi=\infty \\ \eta=m\xi}} x = \lim_{\xi=\infty} \frac{1}{m \cdot \sqrt{1+m^2}} \left(n \cdot m + m \cdot \xi \cdot \sqrt{1+m^2} - n \cdot \sqrt{1+m^2}\right)$$

$$= \lim_{\xi=\infty} \frac{m \cdot \xi \cdot \sqrt{1+m^2}}{m \cdot \sqrt{1+m^2}} = \infty,$$

$$\lim_{\substack{\xi=\infty \\ \eta=m\xi}} y = \lim_{\xi=\infty} \frac{1}{m \cdot \sqrt{1+m^2}} \left[m\,(m\,\xi - n) \cdot \sqrt{1+m^2} - n\right]$$

$$= \lim_{\xi=\infty} m \cdot \frac{m\,\xi \cdot \sqrt{1+m^2}}{m \cdot \sqrt{1+m^2}} = m \cdot \infty.$$

Somit ergibt sich der Satz:

Dem unendlich fernen Punkt der Geraden $\eta = m\xi$ in dem System Σ entspricht doppelt der unendlich ferne Punkt der Geraden $y = mx$ in dem System S.

Zu dem Punkt $\xi = \text{const} = c$, $\eta = 0$ berechnet sich nach den Gleichungen 7) der Punkt $x = \infty$, $y = \infty$; daraus folgt:

Den Punkten der ξ-Achse des Systems Σ sind die Punkte der unendlich fernen Geraden in dem System S zugeordnet.

§ 4.

Geometrische Konstruktion der Punkte des einen Systems, welche einem gegebenen Punkt in dem anderen System entsprechen.

Für die folgenden Untersuchungen legen wir die beiden Systeme so übereinander, daß die x-Achse des Systems S sich mit der ξ-Achse des Systems Σ und die y-Achse in S sich mit der η-Achse in Σ deckt. Die zu Konstruktionen verwendeten Hilfslinien und Hilfspunkte sind zur Unterscheidung von den Punkten der beiden Systeme mit deutschen Buchstaben bezeichnet.

Ein Punkt A des Systems Σ sei gegeben durch die Polarkoordinaten ϱ und ψ; es sollen nun die beiden dem Punkt A entsprechenden Punkte A_1 und A_2 des Systems S konstruiert werden.

Zu ϱ und ψ ergeben die Formeln 6′) die Parameterwerte:

$$q_1 = \varrho - \frac{n}{\sin\psi} \quad \text{und} \quad \vartheta_1 = 90^0 - \psi.$$

Derselbe Punkt A kann aber auch durch die Polarkoordinaten $-\varrho$ und $180^0 - \psi$ festgelegt werden, und zu diesen gehören als Parameter:

$$q_2 = -\varrho + \frac{n}{\sin\psi} = -q_1 \quad \text{und} \quad \vartheta_2 = 270^0 - \psi.$$

Durch Einsetzen dieser beiden Wertepaare in die Gleichungen 5) ergeben sich folgende Koordinaten der Punkte A_1 (x_1, y_1) und A_2 (x_2, y_2):

$$\begin{cases} x_1 = \left(n + \varrho - \dfrac{n}{\sin\psi}\right) \cdot \cos\psi \\ y_1 = \left(n + \varrho - \dfrac{n}{\sin\psi}\right) \cdot \sin\psi - \dfrac{n}{\sin\psi} \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} x_2 = \left(\varrho - \dfrac{n}{\sin\psi} - n\right) \cdot \cos\psi \\ y_2 = \left(\varrho - \dfrac{n}{\sin\psi} - n\right) \sin\psi + \dfrac{n}{\sin\psi}. \end{cases}$$

Für den Punkt A_1 ist:

$$x_1^2 + y_1^2 = (n+q)^2 - 2n(n+q) + \frac{n^2}{\sin^2\psi} = q^2 + n^2\left(\frac{1}{\sin^2\psi} - 1\right)$$
$$= q^2 + n^2(1 + \operatorname{cotg}^2\psi - 1) = q^2 + n^2\operatorname{cotg}^2\psi.$$

Für den Punkt A_2 ist:

$$x_2^2 + y_2^2 = (q-n)^2 + 2n(q-n) + \frac{n^2}{\sin^2\psi} = q^2 + n^2\operatorname{cotg}^2\psi$$
$$= x_1^2 + y_1^2;$$

demnach liegen die beiden Punkte A_1 und A_2 auf einem um den Koordinatenanfangspunkt O beschriebenen Kreis.

Es ergibt sich nun folgende Konstruktion der dem Punkte A entsprechenden Punkte A_1 und A_2:

In Fig. 5 sei die zur ξ-Achse im Abstand $\mathfrak{OT} = -n$ parallele Gerade $\mathfrak{a}$ gezogen. Der Radiusvektor $\mathfrak{O}$A des Punktes A schneidet die Gerade $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{M}$; die Strecke $\mathfrak{OM}$ tragen wir von A aus in der Richtung $\mathfrak{OM}$ auf dem Radiusvektor nach A$\mathfrak{N}$ ab. Dann ist:

$$\mathfrak{ON} = \varrho - \frac{n}{\sin\psi} = q_1.$$

Von $\mathfrak{N}$ aus tragen wir nun auf dem Fahrstrahl die Strecke n nach beiden Seiten nach $\mathfrak{NP}_1$ und $\mathfrak{NP}_2$ ab; die beiden Punkte A_1 und A_2 liegen alsdann auf den durch $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zur η-Achse gezogenen Parallelen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$; denn, wenn $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ die Projektionen von $\mathfrak{P}_1$ bzw. $\mathfrak{P}_2$ auf die ξ-Achse sind, so ist:

$$\mathfrak{O}\mathfrak{Q}_1 = \left(\varrho - \frac{n}{\sin\psi} + n\right)\cos\psi = x_1,$$

$$\mathfrak{O}\mathfrak{Q}_2 = \left(\varrho - \frac{n}{\sin\psi} - n\right)\cos\psi = x_2.$$

Nach den für y_1 und y_2 berechneten Werten liegt A_1 im Abstand $\frac{n}{\sin\psi} = \mathsf{A}\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{P}_1$ nach unten, A_2 in derselben Entfernung von $\mathfrak{P}_2$ nach oben.

Ziehen wir durch $\mathfrak{N}$ eine Parallele $\mathfrak{k}'$ zu der η-Achse und fällen von A auf $\mathfrak{k}'$ eine Senkrechte, deren Fußpunkt $\mathfrak{N}$ sei, so ist

$$\triangle \mathsf{A}\,\mathfrak{N}\mathfrak{N} \sim \triangle A_1\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{N} \sim \triangle A_2\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{N}.$$

Infolgedessen steht die Verbindungslinie der beiden Punkte A_1 und A_2 in $\mathfrak{N}$ auf dem Fahrstrahl senkrecht.

Die dem Punkt A entsprechenden Punkte A_1 und A_2 ergeben sich demnach einfach als die Schnittpunkte der in $\mathfrak{N}$ auf dem Radiusvektor errichteten Senkrechten mit den beiden Parallelen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$.

Es sollen nun zu einem Punkt A des Systems S die vier ihm entsprechenden Punkte des Systems Σ konstruiert werden.

Nach der Gleichung 8) hängt die Bestimmung der Größen q und ϑ von einer Gleichung vierten Grades ab.

Die Auflösung dieser Gleichung nach q führt auf deren kubische Resolvente:

$$8') \quad q'^3 - \frac{1}{2}\left(2x^2 + y^2 + \frac{n^2}{2}\right)q'^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{y^4}{4} + \frac{n^2 y^2}{2}\right)q' - \frac{n^2 y^4}{64} = 0.$$

Da diese Resolvente keine rationale Wurzel q' besitzt, so sind die Wurzeln q der Gleichung 8) nicht durch eine Kette von Quadratwurzeln darstellbar.

Eine strenge geometrische Konstruktion dieser Werte q ist infolgedessen nicht möglich; es läßt sich jedoch die Konstruktion in der Weise ausführen, daß wir von dem in Fig. 6 gegebenen Punkt A graphisch die Tangenten an die Kurve h ziehen. Dabei ist zur Kontrolle der Genauigkeit stets zu beachten,

daß die Strecke auf der Tangente, welche von der y-Achse und der von $\mathfrak{O}$ auf die Tangente gefällten Senkrechten begrenzt wird, stets die Länge n habe. Die Fußpunkte der von $\mathfrak{O}$ auf die vier Tangenten gefällten Lote seien $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{Q}_4$; die Schnittpunkte dieser Tangenten mit der y-Achse $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$; dann ist $A\mathfrak{Q}_1 = q_1$, $A\mathfrak{Q}_2 = q_2$, $A\mathfrak{Q}_3 = q_3$, $A\mathfrak{Q}_4 = q_4$. Beachten wir bei jedem dieser Tangentenabschnitte das in § 2 festgesetzte Vorzeichen, so folgt aus Gleichung 8), daß $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = -2n$, was als Kontrolle dienen kann. Die vier zugehörigen Winkel ϑ sind, wie ebenfalls in § 2 erwähnt wurde, die Winkel der Tangenten mit der positiven y-Achse. Die von $\mathfrak{O}$ ausgehenden Radienvektoren nach den zu bestimmenden Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 des Systems $\mathbf{\Sigma}$ schließen mit der x-Achse die Winkel $\nu = 90^0 - \vartheta$, mit der y-Achse demnach die Winkel ϑ ein und sind somit parallel zu den Tangenten $A\mathfrak{Q}_1$, $A\mathfrak{Q}_2$, $A\mathfrak{Q}_3$, $A\mathfrak{Q}_4$ su ziehen. Die Punkte A_1, A_2 ..... ergeben sich auf diesen Fahrstrahlen nach der Gleichung $\varrho = q + \frac{n}{\cos\vartheta}$, indem von $\mathfrak{O}$ aus zunächst das Tangentenstück q nach $\mathfrak{O}\mathfrak{L}$ und von $\mathfrak{L}$ aus der auf der y-Achse liegende Achsenabschnitt $\mathfrak{O}\mathfrak{P}$, beide mit dem richtigen Vorzeichen, abgetragen werden. Es ist dann:

$$\mathfrak{O}\mathsf{A}_1 = A\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{O}\mathfrak{P}_1,$$
$$\mathfrak{O}\mathsf{A}_2 = A\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{O}\mathfrak{P}_2 \text{ u. s. w.}$$

Um beispielsweise den Punkt A_1 zu erhalten, ziehen wir durch $\mathfrak{O}$ den zu der Tangente $A\mathfrak{Q}_1$ parallelen Fahrstrahl, tragen auf demselben $\mathfrak{O}\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{Q}_1 A$ in der negativen Richtung des Fahrstrahls, also in der Richtung $\mathfrak{Q}_1 A$ und dann von $\mathfrak{L}_1$ aus die Strecke $\mathfrak{L}_1\mathsf{A}_1 = \mathfrak{O}\mathfrak{P}_1$ in der positiven Richtung des Fahrstrahls ab.

§ 5.

Die Singularkurve in dem System S.

Zu den Koordinaten $\xi = 0$, $\eta = 0$ des Anfangspunktes Ω in dem System Σ ergeben die Gleichungen 7) unbestimmte Werte von x und y; diesem Punkt entsprechen dann unendlich viele Punkte, also eine Kurve o, welche wir die Singularkurve des Systems S nennen wollen. Da für Ω der Radiusvektor $\varrho = 0$ ist, so lautet die Gleichung der Kurve o in den Parametern q und ϑ:

$$9) \qquad q + \frac{n}{\cos\vartheta} = 0.$$

Eliminieren wir q aus den Gleichungen 5) und 9), so erhalten wir zunächst folgende Parameterdarstellung der Kurve o

$$10) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{n(\cos\vartheta - 1)}{\cos\vartheta} \cdot \sin\vartheta \\ y = n \cdot \dfrac{\cos^2\vartheta - 1}{\cos\vartheta} - n \end{cases}$$

oder, wenn wir $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ durch $\operatorname{tg}\vartheta$ ausdrücken,

$$10^a) \qquad \begin{cases} x = -n \cdot \operatorname{tg}\vartheta \cdot \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta} - 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}}. \\ y = -n \cdot \dfrac{\operatorname{tg}^2\vartheta + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}}. \end{cases}$$

Die Elimination des Parameters ϑ aus den Gleichungen 10) oder 10^a) liefert folgende Gleichung der Singularkurve o in rechtwinkligen Koordinaten:

$$11) \qquad (y+n)^4 - x^4 + 4n(y+n)x^2 = 0.$$

Die Singularkurve ist demnach eine Kurve vierter Ordnung, welche symmetrisch zu der y-Achse verläuft. Wenden wir auf ihre Gleichung die Transformation

$$x' = x, \qquad y' = y + n$$

an, so geht sie über in:

$$12) \qquad y'^4 - x'^4 + 4ny'x'^2 = 0.$$

Diese Kurve hat Cramer[1]) diskutiert ohne Ausführung einer Konstruktion. Sie hat in dem Koordinatenursprung O' des Systems $x'y'$ einen dreifachen Punkt, und zwar liegen in demselben eine Spitze mit der y-Achse als Spitzentangente und ein einfacher Punkt mit der x'-Achse als Tangente vereinigt. Außerdem geht die Kurve durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte und hat die beiden Geraden $y - x = \pm 2n$ als Asymptoten.

Ihre auf das Koordinatensystem x' y' bezogene Polargleichung

$$13) \qquad r' = 2n \cdot \operatorname{tg} 2\varphi' \cdot \cos\varphi'$$

läßt erkennen, daß die Kurve o von der speziellen Knotenkurve[2]) $r' = 2n\operatorname{tg}2\varphi'$ ableitbar ist, indem wir die Abszissen der Punkte dieser Kurve als Radienvektoren auftragen. Somit läßt sich folgende Konstruktion der Singularkurve angeben:

In Fig. 7 ist um den auf der x'-Achse gelegenen Punkt $\mathfrak{M}$ mit der Abszisse $x' = \mathfrak{O}'\mathfrak{M} = 2n$ der Kreis $\mathfrak{k}$ mit dem Radius $2n$ beschrieben. Ein beliebiger Fahrstrahl durch $\mathfrak{O}'$ schneidet den Kreis $\mathfrak{k}$ in dem Punkt $\mathfrak{K}$; der verlängerte Radius $\mathfrak{K}\mathfrak{M}$ trifft die y-Achse in dem Punkt $\mathfrak{T}$. Wird dann die Strecke $\mathfrak{O}'\mathfrak{T}$ mit dem betreffenden Vorzeichen von $\mathfrak{O}'$ aus auf der x'-Achse nach $\mathfrak{O}'\mathfrak{S}$ abgetragen und von dem Punkt $\mathfrak{S}$ die Senkrechte auf den Fahrstrahl $\mathfrak{O}'\mathfrak{K}$ gefällt, so ist der Fußpunkt P dieser Senkrechten ein Punkt der Kurve o.

Durch Anwendung der im vorigen Paragraphen gegebenen Konstruktion der einem Punkt A des Systems Σ entsprechenden Punkte A_1 und A_2 in dem System S können wir die Singularkurve o in der Weise konstruieren, daß wir den Koordinatenanfangspunkt Ω als einen Kreis von unendlich kleinem Radius

---

[1]) Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genéve 1750, p. 611.

[2]) Loria, a. a. O., S. 184.

betrachten und zu sämtlichen Punkten dieses Kreises die entsprechenden Punktepaare in dem System S konstruieren. Es ergibt sich dann folgende Konstruktion:

Wir ziehen in Fig. 8 einen beliebigen Fahrstrahl durch $\mathfrak{O}$, der die x'-Achse in dem Punkt $\mathfrak{N}$ schneidet, tragen dann von $\mathfrak{N}$ aus die Strecke $\mathfrak{O}'\mathfrak{O} = n$ beiderseits auf dem Fahrstrahl nach $\mathfrak{N}\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{N}\mathfrak{M}_2$ ab, ziehen durch die Endpunkte $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ Parallele zur y-Achse und errichten in $\mathfrak{N}$ die Senkrechte auf dem Fahrstrahl $\mathfrak{O}\mathfrak{N}$; dann sind die beiden Schnittpunkte P_1 und P_2 dieser Senkrechten mit den Parallelen zur y-Achse Punkte der Kurve o.

Die Parameterdarstellung 10) kann auch geschrieben werden:

$$10^b) \qquad \begin{cases} x = \left(n - \dfrac{n}{\cos\vartheta}\right)\sin\vartheta \\ y = \left(n - \dfrac{n}{\cos\vartheta}\right)\cos\vartheta - \dfrac{n}{\cos\vartheta}. \end{cases}$$

Die Singularkurve geht also durch die Transformation

$$x' = x, \qquad y' = y + \frac{n}{\cos\vartheta}$$

aus der in Fig. 9 gezeichneten gespitzten Konchoide k mit den Gleichungen

$$14) \qquad \begin{cases} x = \left(n - \dfrac{n}{\cos\vartheta}\right)\sin\vartheta \\ y = \left(n - \dfrac{n}{\cos\vartheta}\right)\cdot\cos\vartheta \end{cases}$$

hervor. Diese Konchoide k ist der Ort der bei der vorigen Konstruktion verwendeten Punkte $\mathfrak{M}$. Wir können demnach die Konstruktion der Singularkurve auch in der Weise ausführen, daß wir in Fig. 9 durch die Schnittpunkte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ eines beliebigen Fahrstrahles $\mathfrak{f}$ mit der Konchoide k Parallele zur y-Achse ziehen, in dem Schnittpunkt $\mathfrak{N}$ des Fahrstrahles $\mathfrak{f}$ mit der x'-Achse eine Senkrechte zu $\mathfrak{f}$ errichten und die Schnittpunkte P_1 und P_2 dieser Senkrechten mit den Parallelen zur y-Achse aufsuchen.

§ 6.

Die Kurve des Systems Σ, welche einer Geraden in dem System S entspricht.

In Fig. 9 sei in dem System S eine Gerade l gegeben, die auf der x-Achse den Abschnitt $OR = s$ und auf der y-Achse den Abschnitt $OT = t$ bildet. Diese Gerade hat die Gleichung:

$$tx + sy = st.$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung x und y durch die in den Gleichungen 7) berechneten Werte, so erhalten wir die Gleichung der der Geraden l entsprechenden Kurve λ in dem System Σ. Dieselbe lautet:

$$15) \quad n\xi(t\eta - s\xi) = [st\eta - (\eta - n)(s\eta + t\xi)] \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Durch Quadrieren erhalten wir:

$$\begin{aligned} &s^2 \cdot \eta^6 + 2st\eta^5\xi + (s^2 + t^2)\eta^4\xi^2 + 2st\eta^3\xi^3 + t^2\eta^2\xi^4 \\ &- 2s^2(n+t)\eta^5 - 2st(2n+t)\eta^4\xi - 2(ns^2 + nt^2 + s^2t)\eta^3\xi^2 \\ 15') \quad &- 2st(2n+t)\eta^2\xi^3 - 2nt^2\eta\xi^4 + s^2(n+t)^2\eta^4 \\ &+ 2nst(n+t)\eta^3\xi + s^2(n+t)^2\eta^2\xi^2 + 2nst(2n+t)\eta\xi^3 \\ &+ n^2(t^2 - s^2)\xi^4 = 0. \end{aligned}$$

Die Kurve λ ist also von der sechsten Ordnung und hat im Koordinatenanfangspunkt einen vierfachen Punkt, was auch schon daraus hervorgeht, daß die Gerade l die Singularkurve o in vier Punkten schneidet. Die Winkel ϑ', welche die Tangenten dieses vierfachen Punktes mit der x-Achse bilden, erhalten wir durch Nullsetzen der Glieder vierter Ordnung der Kurvengleichung 15′) aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} 16) \quad &s^2(n+t)^2 \cdot \operatorname{tg}^4\vartheta' + 2nst(n+t)\operatorname{tg}^3\vartheta' + s^2(n+t)^2\operatorname{tg}^2\vartheta' \\ &+ 2nst(2n+t)\operatorname{tg}\vartheta' + n^2(t^2 - s^2) = 0. \end{aligned}$$

Es ergibt sich eine einfache Beziehung dieser vier Winkel ϑ' zu den Schnittpunkten der Geraden l mit der Singularkurve o.

Nach der in Fig. 9 angegebenen Konstruktion der Singularkurve o entsprechen den vier Schnittpunkten A, B, C, D der Geraden l mit der Kurve o vier Punkte A', B', C', D' der ge-

spitzten Konchoide k, und die zu diesen Punkten gehörenden Polarwinkel ϑ ergeben sich aus der Gleichung der Geraden l und den Gleichungen 10ª) der Singularkurve durch Elimination von x und y.

Wir erhalten dadurch folgende Beziehung:

$$16^{a}) \quad \begin{aligned} & s^2(n+t)^2\operatorname{cotg}^4\vartheta + 2nst(n+t)\operatorname{cotg}^3\vartheta + s^2(n+t)^2\operatorname{cotg}^2\vartheta \\ & + 2nst(2n+t)\operatorname{cotg}\vartheta + n^2(t^2-s^2) = 0. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen 16) und 16ª) geht hervor, daß $\operatorname{tg}\vartheta' = \operatorname{cotg}\vartheta$. Somit erhalten wir den Satz:

Die Winkel, welche die Tangenten der Kurve λ in ihrem vierfachen Punkte mit der ξ-Achse bilden, sind gleich den Polarwinkeln der Punkte der gespitzten Konchoide k, die den vier von der Geraden l auf der Singularkurve o bestimmten Schnittpunkten entsprechen.

Die vier Tangenten der Kurve λ im Koordinatenanfangspunkt erhalten wir also, indem wir in Fig. 9 graphisch zu den vier Schnittpunkten A, B, C, D der Geraden l mit der Singularkurve o die vier entsprechenden Punkte A', B', C', D' der Konchoide k bestimmen und von denselben aus die Strahlen durch $\mathfrak{O}$ ziehen. Hierbei ist zu beachten, daß den Punkten auf dem oberen Zweig der Singularkurve Punkte auf dem unteren Zweig der Konchoide entsprechen und umgekehrt.

Durch Transformation der Kurvengleichung 15′) auf ein neues Achsensystem $\xi'\ \eta'$ mit Hilfe der Formeln

$$\xi = \xi', \qquad \eta = \eta' + (n+t)$$

werden die Glieder niedrigster Ordnung die quadratischen; demnach hat die Kurve λ den Punkt $\xi = 0$, $\eta = n + t$ auf der η-Achse als Doppelpunkt. Die Gleichung der Doppelpunktstangenten ergibt sich durch Nullsetzen der quadratischen Glieder:

$$\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)^2 + 2\cdot\frac{\eta'}{\xi'}\cdot\frac{t^2}{s(n+t)} + \frac{t^2}{s^2}\cdot\frac{t-n}{t+n} = 0.$$

Diese Gleichung zeigt uns, daß eine dieser Doppelpunktstangenten parallel zu der Geraden l ist. Diese Tangente t_1 ist in Fig. 12 an die Kurve λ gezogen.

In derselben Weise ergibt sich als Doppelpunkt der Schnittpunkt der Kurve λ mit dem zu der Geraden l senkrechten Fahrstrahl $\frac{\eta}{\xi} = \frac{s}{t}$, also der Punkt mit den Koordinaten:

$$\xi = \frac{t}{s}\left(n + \frac{s^2 t}{s^2 + t^2}\right), \qquad \eta = n + \frac{s^2 t}{s^2 + t^2}.$$

Durch Nullsetzen der Glieder höchster Ordnung der Gleichung 15′) erhalten wir die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten der Kurve λ. Setzen wir $\frac{\eta}{\xi} = u$, so ergibt sich:

$$s^2 u^6 + 2 s t u^5 + (s^2 + t^2) u^4 + 2 s t u^3 + t^2 u^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei Paare zusammenfallender Wurzeln:

$$1) \quad u_1 = u_2 = 0, \qquad 2) \quad u_3 = u_4 = -\frac{t}{s};$$

die beiden anderen Wurzel sind $u_5 = i$, $u_6 = -i$.

Durch Diskussion der Kurve mit Hilfe des Cramerschen Polygons ergibt sich, daß der unendlich ferne Punkt der ξ-Achse ein Doppelpunkt ist, dessen Tangentenpaar die Gleichung

$$\eta^2 - 2 n \eta + n^2 \left(1 - \left(\frac{s}{t}\right)\right)^2 = 0$$

erfüllt, und ebenso ergibt sich der unendlich ferne Punkt der Richtung von l als Doppelpunkt, dessen Tangenten der Gleichung

$$\left(\xi + \frac{s}{t} \cdot \eta\right)^2 - 2 s \left(\xi + \frac{s}{t} \cdot \eta\right) + s^2 - n^2 \left(\frac{s}{t}\right)^2 \left(1 + \frac{s}{t}\right)^2 = 0$$

genügen.

Somit erhalten wir folgendes Resultut:

Einer Geraden l des Systems S entspricht in dem System Σ eine Kurve λ von der sechsten Ordnung, die

in dem Koordinatenursprung einen vierfachen Punkt und noch zwei weitere im Endlichen gelegene Doppelpunkte besitzt; sie geht durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte und hat den unendlich fernen Punkt der ξ-Achse und den der Geraden l als Doppelpunkte.

Die Kurve könnte in der in § 4 angegebenen Weise konstruiert werden, indem wir zu jedem Punkt der Geraden l die vier entprechenden Punkte in dem System Σ graphisch mittels der Hüllbahnkurve h bestimmen.

Wir wollen jedoch diese Konstruktion nicht ausführen, sondern noch eine zweite, strenge geometrische Konstruktion der Kurve aus ihrer Polargleichung ableiten.

Diese Gleichung wird durch Einführung von ϱ und ψ an Stelle von

$$\xi = \varrho \cdot \cos\psi \quad \text{und} \quad \eta = \varrho \cdot \sin\psi$$

in die Gleichung 15) erhalten und lautet:

17) $$\begin{aligned} & st\sin\psi - (\varrho\sin\psi - n)(s\sin\psi + t\cos\psi) \\ & \quad - n\cos\psi(t\sin\psi - s\cos\psi) = 0. \end{aligned}$$

Durch Umformung dieser Gleichung können wir den Radiusvektor ϱ in zwei Teile zerlegen:

17a) $$\varrho = \frac{st\sin\psi + ns\sin\psi + nt\cos\psi}{s\sin^2\psi + t\sin\psi\cos\psi} + \frac{ns\cos^2\psi - nt\sin\psi\cos\psi}{s\sin^2\psi + t\sin\psi\cos\psi}.$$

Die Kurve λ kann demnach aus zwei Begleitkurven $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ zusammengesetzt worden, welche die Polargleichungen haben:

18) $$\varrho' = \frac{st\sin\psi + ns\sin\psi + nt\cos\psi}{\sin\psi(s\sin\psi + t\cos\psi)}$$

bzw.

19) $$\varrho'' = \frac{ns\cos^2\psi - nt\sin\psi\cos\psi}{\sin\psi(s\sin\psi + t\cos\psi)}.$$

Konstruieren wir für jede dieser beiden Kurven zu einem Polarwinkel ψ den betreffenden Radiusvektor ϱ' bzw. ϱ'', so ergibt die Summe $\varrho' + \varrho''$ den zu ψ gehörigen Radiusvektor der Kurve λ.

Die Hilfskurve $\mathfrak{u}$ hat in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung

$$18^a) \qquad s\eta^2 + t\xi\eta - s(n+t)\eta - nt\xi = 0$$

und ist also eine Hyperbel, die durch den Koordinatenursprung geht. Eine nähere Untersuchung ergibt, daß die eine Asymptote die in Fig. 10 gezeichnete, mit l identische Gerade $\mathfrak{g}$ des Systems Σ und die andere Asymptote die zur ξ-Achse im Abstand $\Omega\mathfrak{S} = n$ parallele Gerade $\mathfrak{a}$ ist. Von der Hyperbel sind uns also die beiden Asymptoten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}$ und ein Punkt Ω gegeben. Folglich erhalten wir folgende Konstruktion der Hyperbel $\mathfrak{u}$:

Ein beliebiger Fahrstrahl durch Ω schneidet die beiden Asymtoten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}$ in resp. den Punkten $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{R}$. Machen wir auf diesem Fahrstrahl die Strecke $\mathfrak{N}\Pi = \Omega\mathfrak{R}$, dann ist Π ein Punkt der Hyperbel $\mathfrak{u}$.

Die Hilfskurve $\mathfrak{v}$ hat die Polargleichung:

$$\varrho'' = \frac{n s\cos^2\psi - n t\sin\psi\cos\psi}{s\sin^2\psi + t\sin\psi\cos\psi} = \frac{n(s - t\operatorname{tg}\psi)}{\operatorname{tg}\psi\,(t + s\operatorname{tg}\psi)}.$$

Wenn wir den Richtungskoeffizienten der Geraden l

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{t}{s}$$

einführen, so wird:

$$19^a) \qquad \varrho'' = n\cdot\operatorname{cotg}\psi\cdot\operatorname{cotg}(\psi - \alpha).$$

Dann ergibt sich in kartesischen Koordinaten die Gleichung der Kurve $\mathfrak{v}$:

$$19^b) \qquad (\xi^2+\eta^2)\eta^2(s\eta + t\xi)^2 - n^2\xi^2(s\xi - t\eta)^2 = 0.$$

Die Kurve $\mathfrak{v}$ ist wie die Kurve λ von der sechsten Ordnung, ist zentrisch-symmetrisch zum Koordinatenanfang und hat in demselben einen vierfachen Punkt, von dessen Tangenten je zwei in die η-Achse und in die zu l senkrechte Gerade $\frac{\eta}{\xi} = \frac{s}{t}$ zusammenfallen. Außerdem geht die Kurve $\mathfrak{v}$ durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte und hat den unendlich fernen Punkt der ξ-Achse und den der Geraden l als Doppelpunkte.

Diese letztere Eigenschaft ergibt sich wieder wie bei der Kurve λ durch Diskussion mit Hilfe des Cramerschen Polygons.

In dem unendlich fernen Punkt der ξ-Achse hat die Kurve die Tangenten $\eta = \pm n \cdot \frac{s}{t}$, in dem unendlich fernen Punkt der Geraden l sind die beiden Geraden $\xi + \frac{s}{t} \cdot \eta = \pm n \cdot \frac{s}{t} \sqrt{1 + \left(\frac{s}{t}\right)^2}$ die Doppelpunktstangenten der Kurve.

Eine Konstruktion der Kurve $\mathfrak{v}$ kann aus ihrer Polargleichung 19[a]) abgeleitet werden.

In Fig, 11 ist die zur ξ-Achse im Abstand $\mathfrak{O}\mathfrak{N} = n$ parallele Gerade $\mathfrak{a}$ und der zur Geraden l senkrechte Fahrstrahl $\mathfrak{t}$ gezogen. Ein beliebiger Fahrstrahl durch $\mathfrak{O}$ schneidet die Gerade $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{M}$. Von $\mathfrak{O}$ aus tragen wir auf $\mathfrak{t}$ die Strecke $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{O}\mathfrak{Q}$ ab, ziehen durch $\mathfrak{Q}$ eine Parallele zu l bis zum Schnittpunkt $\mathfrak{R}$ mit dem Fahrstrahl und tragen die Strecke $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{O}$ aus beiderseits auf dem Fahrstrahl nach $\mathfrak{O}\,\mathit{II}$ und $\mathfrak{O}\,\mathit{II}$ ab. Die Punkte II und II' sind dann Punkte der Kurve $\mathfrak{v}$.

Die Konstruktion der Kurve λ mittels der beiden Kurven $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ ist hiernach die folgende:

Wir ziehen in Fig. 12 durch Ω einen beliebigen Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ und bestimmen auf ihm die beiden Punkte $\mathit{II}_\mathfrak{u}$ und $\mathit{II}_\mathfrak{v}$ der Begleitkurven $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$. Diese beiden Punkte entnehmen wir aus Fig. 10 und Fig. 11. Machen wir dann unter Berücksichtigung des Richtungssinnes $\Omega\,\mathit{II}_\lambda = \Omega\,\mathit{II}_\mathfrak{u} + \Omega\,\mathit{II}_\mathfrak{v}$, so ist II_λ ein Punkt der Kurve λ.

Als Kontrolle muß sich ergeben, daß die Tangenten des vierfachen Punktes mit den in Fig. 9 konstruierten übereinstimmen.

§ 7.

Die Kurven in dem System Σ, welche den speziell gelegenen Geraden des Systems S entsprechen.

a) Als ersten Spezialfall der Geraden l nehmen wir eine Gerade l_a durch den Koordinatenursprung. Ihre Gleichung ist:

$$tx + sy = 0.$$

Die Gleichung der ihr entsprechenden Kurve λ_a ergibt sich aus der Gleichung von l_a und den Gleichungen 7). Sie lautet

$$20) \quad n\xi(t\eta - s\xi) + (\eta - n)(s\eta + t\xi)\cdot\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = 0$$

oder

$$\begin{aligned} 20^a) \quad & s^2\eta^6 + 2st\eta^5\xi + (s^2 + t^2)\eta^4\xi^2 + 2st\eta^3\xi^3 + t^2\eta^2\xi^4 \\ & - 2ns^2\eta^5 - 4nst\eta^4\xi - 2n(s^2 + t^2)\eta^3\xi^2 - 4nst\eta^2\xi^3 \\ & - 2nt^2\eta\xi^4 + n^2s^2\eta^4 + 2n^2st\eta^3\xi + n^2s^2\eta^2\xi^2 + 4n^2st\eta\xi^3 \\ & + n^2(t^2 - s^2)\xi^4 = 0. \end{aligned}$$

Einer Geraden durch den Koordinatenursprung O entspricht demnach auch eine Kurve sechster Ordnung mit dem Koordinatenanfangspunkt Ω als vierfachem Punkt; derselbe hat entsprechend den Schnittpunkten von l_a mit der Singularkurve o stets zwei reelle und zwei imaginäre Zweige.

In Polarkoordinaten lautet die Gleichung der Kurve λ_a:

$$20^b) \quad \varrho = \frac{ns\cos^2\psi - nt\cos\psi\sin\psi}{s\sin^2\psi + t\cos\psi\sin\psi} + \frac{n}{\sin\psi} = \varrho' + \varrho''.$$

Zum Zwecke der Konstruktion der Kurve λ_a setzen wir den Radiusvektor ϱ wieder aus den beiden Teilen ϱ' und ϱ'' zusammen. Wählen wir in Fig. 13 die Richtung der Geraden l_a parallel zu der Geraden l im vorigen Paragraphen, so ist die Begleitkurve $\mathfrak{v}$ hier dieselbe wie dort, während die Hyperbel $\mathfrak{u}$ in die zur ξ-Achse parallele Gerade $\varrho'' = \frac{n}{\sin\psi}$ oder $\eta = n$ übergeht.

Es braucht in diesem Falle die Kurve $\mathfrak{v}$ nicht erst gezeichnet zu werden, sondern wir erhalten direkt die Kurve λ_a in folgender Weise:

In Fig. 13, Taf. II ist die zur ξ-Achse im Abstand $\mathfrak{O}\mathfrak{N} = n$ parallele Gerade $\mathfrak{a}$ gezogen. Ein beliebiger Fahrstrahl durch $\mathfrak{O}$ schneidet die Gerade $\mathfrak{a}$ in einem Punkt $\mathfrak{M}$. Die Strecke $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ tragen wir von $\mathfrak{O}$ aus auf der zu der Geraden l_a senkrechten Geraden $\mathfrak{t}$ nach $\mathfrak{O}\mathfrak{Q}$ ab, ziehen durch $\mathfrak{Q}$ zu l_a eine Parallele, welche den Fahrstrahl $\mathfrak{O}\mathfrak{M}$ in dem Punkt $\mathfrak{R}$ schneidet, und tragen die Strecke $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{M}$ aus beiderseits auf diesem Fahrstrahl nach $\mathfrak{M}II$ bzw. $\mathfrak{M}II'$ ab. Die Punkte II und II' sind dann Punkte der Kurve λ_a.

b) Die Gerade l sei parallel zur x-Achse und mit l_b bezeichnet. Ihre Gleichung ist:

$$y = t.$$

Mit Hilfe der Gleichung 7) ergibt sich für die der Geraden l_b zugeordnete Kurve λ_b folgende Gleichung:

$$21) \quad \begin{aligned} &\eta^6 + \eta^4\,\xi^2 - 2\,(n+t)\,\eta^5 - 2\,(n+t)\,\eta^3\,\xi^2 + (n+t)^2\,\eta^4 \\ &+ (n+t)^2\,\eta^2\,\xi^2 - n^2\,\xi^4 = 0. \end{aligned}$$

Die Kurve λ_b ist demnach von der sechsten Ordnung, symmetrisch zur η-Achse, hat im Kordinatenanfang einen vierfachen Punkt mit zwei reellen und zwei imaginären Zweigen und in dem Punkt $\xi = 0$, $\eta = n + t$ einen Selbstberührungspunkt mit einer zur ξ-Achse parallelen Tangente.

Die Polargleichung der Kurve λ_b ist

$$21^a) \quad \varrho = \frac{n+t}{\sin\psi} + n \cdot \operatorname{cotg}^2\psi$$

und die bei der Konstruktion sich ergebenden Begleitkurven $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ haben somit die Gleichungen:

$$\varrho' = \frac{n+t}{\sin\psi} \quad \text{und} \quad \varrho'' = n \cdot \operatorname{cotg}^2\psi.$$

Für die Kurve λ_b ergibt sich dann die folgende Konstruktion:

Wir zeichnen in Fig. 14 zunächst die beiden zur ξ-Achse parallelen Geraden in den Abständen:

$$\mathfrak{O}\mathfrak{N} = n + t \quad \text{und} \quad \mathfrak{O}\mathfrak{M} = n.$$

Ein beliebiger Fahrstrahl durch $\mathfrak{O}$ trifft die beiden Parallelen in den Punkten $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{R}$. In $\mathfrak{R}$ errichten wir zu $\mathfrak{O}\mathfrak{R}$ die Senkrechte, welche die η-Achse in dem Punkte $\mathfrak{Q}$ schneidet und tragen die Strecke $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{S}$ aus beiderseits auf dem Fahrstrahl nach $\mathfrak{S}\Pi$ und $\mathfrak{S}\Pi'$ ab. Die Punkte Π und Π' sind dann Punkte der Kurve λ_b.

Unter den zur x-Achse parallelen Geraden wollen wir die Spezialfälle $y = 0$ und $y = -n$ herausgreifen und die denselben entsprechenden Kurven λ_b' und λ_b'' bestimmen.

Der x-Achse $y = 0$ entspricht die Kurve λ_b' mit der Gleichung

$$(\xi^2 + \eta^2)\,\eta^2\,(\eta - n)^2 - n^2\,\xi^4 = 0$$

oder

$$\varrho = \frac{n}{\sin\psi} + n\,\mathrm{cotg}^2\,\psi.$$

Die in Fig. 15 ausgeführte Konstruktion der Kurve λ_b' unterscheidet sich von der Konstruktion der Kurve λ_b nur dadurch, daß die Strecke $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}$ nicht von $\mathfrak{S}$, sondern von dem Punkt $\mathfrak{R}$ aus nach beiden Seiten abgetragen wird.

Für die Gerade $y = -n$ lautet die Gleichung der zugeordneten Kurve λ_b''

$$\eta^4\,(\xi^2 + \eta^2) = n^2\,\xi^4$$

oder

$$\varrho = n \cdot \mathrm{cotg}^2\,\psi.$$

Dieselbe ist demnach symmetrisch zu beiden Achsen; für den Koordinatenursprung ergeben sich mit Hilfe des Cramerschen Polygons als Näherungskurven die beiden Neilschen Parabeln $\xi = \pm\left(\frac{\eta}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$; demnach hat die Kurve in diesem Punkt zwei Spitzen mit der η-Achse als gemeinsamer Tangente. Die in Fig. 16 ausgeführte Konstruktion dieser Kurve geht aus der Konstruktion der Kurve λ_b hervor, wenn wir die auf der $\overline{\eta y}$-Achse liegende Strecke $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{O}$ aus als Radiusvektor nach $\mathfrak{O}\Pi$ und $\mathfrak{O}\Pi'$ abtragen.

c) Ein dritter Spezialfall ist der, daß die Gerade l als l_c parallel zur y-Achse gerichtet ist und die Gleichung hat:

$$x = s.$$

Für die der Geraden l_c entsprechende Kurve λ_c ergeben die Gleichungen 7) folgende Gleichung

22) $$\eta^4\xi^2 + \eta^2\xi^4 - 2s\eta^4\xi - 2n\eta^3\xi^2 - 2s\eta^2\xi^3 - 2n\xi^4\eta + s^2\eta^4 + 2ns\eta^3\xi + s^2\eta^2\xi^2 + 2ns\eta\xi^3 + n^2\xi^4 = 0$$

oder in Polarkoordinaten:

22a) $$\varrho = \frac{n}{\sin\psi} + \frac{s}{\cos\psi} - n.$$

Von den beiden bei der Konstruktion der Kurve λ sich ergebenden Begleitkurven $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ wird die Kurve $\mathfrak{u}$ eine gleichseitige Hyperbel mit der Gleichung $\eta\xi - s\eta - n\xi = 0$, die Kurve $\mathfrak{v}$ geht über in den Kreis $\xi^2 + \eta^2 = n^2$.

Demnach erhalten wir für die Kurve λ_c folgende Konstruktion:

Wir bestimmen in Fig. 17 nach der im vorigen Paragraphen angegebenen Weise den auf einem beliebigen Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ gelegenen Punkt $\Pi_\mathfrak{u}$ der gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{u}$ und tragen von $\Pi_\mathfrak{u}$ aus die Strecke n beiderseits auf dem Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ nach $\Pi_\mathfrak{u}\Pi_1$ bzw. $\Pi_\mathfrak{u}\Pi_2$ ab. Die Punkte Π_1 und Π_2 gehören dann der Kurve λ_c an.

Aus dieser Konstruktion geht hervor, daß die Kurve λ_c ein Analogon zu der in Fig. 2 gezeichneten Nikomedischen Konchoide ist. Bei dieser Konchoide wird die feste Gerade φ als Basis bezeichnet, und analog nennen wir jene Kurven, welche wie die Konchoide erzeugt werden nur mit dem Unterschied, daß φ eine beliebige Kurve ist, Konchoiden mit beliebiger Basis.[1]) Zu dieser Kategorie von Kurven gehört also die Kurve λ_c, für welche die gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{u}$ als Basis aufzufassen ist.

Die Kurve λ_c ist, wie schon aus der Gleichung 22) ersichtlich, von der sechsten Ordnung und hat im Koordinatenursprung einen vierfachen Punkt mit zwei reellen und zwei imaginären Zweigen.

[1]) Loria, a. a. O., S. 135.

Ein Spezialfall von λ_c ist die Kurve, die der y-Achse $x = 0$ entspricht. Dieselbe zerfällt in die gespitzte Nikomedische Konchoide $(\xi^2 + \eta^2)(\eta - n)^2 = n^2\eta^2$ und in die η-Achse als doppelt zählende Gerade.

Bei allen in diesem Paragraphen konstruierten Kurven können wieder wie bei der Kurve λ die Tangenten in dem Koordinatenanfangspunkt in der auf der Seite 27 angegebenen Weise bestimmt werden.

§ 8.

Die Kurve des Systems Σ, die einem Kreis in dem System S entspricht.

Es sei nun in dem System S ein um den Koordinatenursprung O beschriebener Kreis k mit dem Radius r gegeben, der also die Gleichung hat:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Die Gleichung der dem Kreis k entsprechenden Kurve $\varkappa$ erhalten wir durch Elimination von x und y aus den Gleichungen 7) und der Kreisgleichung in folgender Form:

23) $$(\xi^2 + \eta^2)(\eta - n)^2 + n^2\xi^2 - r^2\eta^2 = 0.$$

Einem Kreis um den Koordinatenanfang entspricht demnach eine Kurve von der vierten Ordnung, welche durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte hindurchgeht, symmetrisch zur η-Achse verläuft und im Koordinatenursprung einen Doppelpunkt hat, dessen Tangenten durch die Gleichung bestimmt sind:

$$\frac{\eta}{\xi} = \pm\sqrt{\frac{2n^2}{r^2 - n^2}}.$$

Die Polargleichung der Kurve $\varkappa$ lautet:

23a) $$\varrho = \frac{n}{\sin\psi} \pm \sqrt{r^2 - n^2\operatorname{cotg}^2\psi}.$$

Aus dieser Gleichung können wir folgende Konstruktion der Kurve ableiten:

In Fig. 18 ist die zur ξ-Achse im Abstand $\mathfrak{DM} = n$ parallele Gerade a und um den Koordinatenursprung $\mathfrak{D}$ der Kreis k ge-

zeichnet. Ein beliebiger Fahrstrahl durch $\mathfrak{O}$ trifft die Gerade a in dem Punkt $\mathfrak{M}$; durch $\mathfrak{M}$ ziehen wir zur $y\eta$-Achse eine Parallele, welche den Kreis k in $\mathfrak{K}$ und die x-Achse in $\mathfrak{Q}$ schneidet und tragen die Strecke $\mathfrak{K}\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{M}$ aus nach beiden Seiten auf dem Fahrstrahl nach $\mathfrak{M}\Pi$ bzw. $\mathfrak{M}\Pi'$ ab. Die Punkte Π und Π' sind dann Punkte der Kurve $\varkappa$.

Je nachdem der Radius r größer, kleiner oder gleich n ist, wird im Koordinatenanfang $\mathfrak{O}$ ein Doppelpunkt, ein isolierter Punkt oder eine Spitze sein.

§ 9.

Die Kurve des Systems S, die einer Geraden in dem System Σ zugeordnet ist.

Für den Übergang von dem System S zu dem System Σ können wir vermöge der Gleichungen 7) zu jeder in S gegebenen Kurve die entsprechende in Σ finden. Die Lösung der umgekehrten Aufgabe, zu jeder in dem System Σ befindlichen Kurve die zugeordnete Kurve in S zu bestimmen, scheitert jedoch an dem Umstand, daß die Gleichungen 6) nicht reduzierbar sind.

Diese Aufgabe kann also nur in der Weise gelöst werden, daß wir in der Gleichung $f(\xi, \eta) = 0$ der in Σ gegebenen Kurve mittels der Gleichungen 6) die Koordinaten ξ und η durch die Parameter q und ϑ ersetzen und aus der dadurch erhaltenen Gleichung $\varphi(q, \vartheta) = 0$ und den Gleichungen 5) die Größen q und ϑ wieder eliminieren. Diese Elimination ist jedoch nur in wenigen Fällen durchführbar. Es würde schon der Fall, daß die Gleichung $f(\xi, \eta) = 0$ eine Gerade von allgemeiner Lage darstellt, auf sehr langwierige Rechnungen führen. Wir wollen uns deshalb im folgenden darauf beschränken, zu einigen Geraden in speziellen Lagen die entsprechenden Kurven in dem System S aufzusuchen.

a) Eine zur ξ-Achse parallele Gerade μ sei gegeben durch die Gleichung:

$$\eta = c.$$

Die ihr entsprechende Kurve m in dem System S ergibt sich durch Elimination von q und ϑ aus den Gleichungen:

$$x = (n + q)\sin\vartheta$$
$$y = (n + q)\cos\vartheta - \frac{n}{\cos\vartheta}$$
$$n + q\cos\vartheta = c.$$

Die drittte dieser Gleichungen gibt zusammen mit der ersten

$$q^4 + 2nq^3 + [n^2 - (c-n)^2 - x^2]q^2 - 2n(c-n)^2 q - n^2(c-n)^2 = 0$$

und mit der zweiten:

$$nq^2 + (c-n)(y-c+n)q - n(c-n)^2 = 0.$$

Die Elimination von q aus diesen zwei Gleichungen liefert als Resultat die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2n & n^2-(c-n)^2-x^2 & -2n(c-n)^2 & -n^2(c-n)^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2n & n^2-(c-n)^2-x^2 & -2n(c-n)^2 & -n^2(c-n)^2 \\ n & (c-n)(y-c+n) & -n(c-n)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & (c-n)(y-c+n) & -n(c-n)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & (c-n)(y-c+n) & -n(c-n)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & (c-n)(y-c+n) & -n(c-n)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Ausrechnen dieser Determinante erhalten wir die Gleichung der Kurve m in der Form:

$$\begin{aligned} 24) \quad & (c-n)^2(y-c+n)^4 - [n^2-(c-n)^2]\cdot x^2(y-c+n)^2 \\ & - n^2x^4 + 2(c-n)[(c-n)^2 - n^2]\cdot(y-c-n)^3 \\ & - 4n^2(c-n)x^2(y-c+n) + [n^2-(c-n)^2]^2\cdot(y-c+n)^2 \\ & = 0. \end{aligned}$$

Durch Transformation dieser Gleichung auf ein neues Koordinatensystem mit Hilfe der Gleichungen

$$x' = x, \qquad y' = y - (c-n)$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} 24^a) \quad & (x'^2 + y'^2)[(c-n)^2\cdot y'^2 - n^2x^2] - 2(c-n)\cdot[n^2-(c-n)^2]\cdot y'^3 \\ & - 4n^2(c-n)y'x'^2 + [n^2-(c-n)^2]\cdot y'^2 = 0. \end{aligned}$$

Wie aus dieser Gleichung ersichtlich, ist die Kurve m von der vierten Ordnung, verläuft symmetrisch zu der y-Achse, geht durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte und besitzt in dem Punkt $x=0$, $y=c-n$ einen Selbstberührungspunkt mit einer zur x-Achse parallelen Tangente.

Ferner ist der Punkt

$$x=0, \qquad y=\frac{n^2-(c-n)^2}{c-n}$$

ein Doppelpunkt der Kurve; denn bei der Transformation des Koordinatensystems xy in ein paralleles $x''y''$ durch diesen Punkt werden die Glieder niedrigster Ordnung solche von der zweiten und ergeben für die Doppelpunktstangenten die Gleichung:

$$\left(\frac{y''}{x''}\right)^2=\frac{n^2+(c-n)^2}{(c-n)^2\left[n^2-(c-n)^2\right]}.$$

Aus den Gliedern höchster Ordnung der Gleichung 24[a]) ersehen wir, daß die Kurve m die beiden Geraden

$$\frac{(c-n)\cdot y'}{n^2}\pm\frac{x'}{n}=1$$

als Asymptoten besitzt.

Tragen wir demnach in Fig. 19 auf der x'-Achse die Strecken $O'\mathfrak{V}=O'\mathfrak{W}=n$ ab, so sind die in $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ auf $\mathfrak{O}\mathfrak{V}$ bzw. $\mathfrak{O}\mathfrak{W}$ errichteten Senkrechten die Asymptoten der Kurve m.

Nach der auf Seite 20 angegebenen und in Fig. 5 durchgeführten Konstruktion des einem Punkt A des Systems Σ entsprechenden Punktepaares A_1, A_2 können wir die Kurve m in folgender Weise zeichnen:

In Fig. 19 sei die zur ξ-Achse im Abstand $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'=c-n$ parallele Gerade x' gezogen. Ein beliebiger Fahrstrahl durch $\mathfrak{O}$ trifft die Gerade x' in dem Punkt $\mathfrak{M}$. Tragen wir auf dem Fahrstrahl die Strecke n nach $\mathfrak{M}\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{N}_2$, ziehen durch $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ Parallele zur y-Achse und errichten in dem Punkte $\mathfrak{M}$ die Senkrechte auf dem Fahrstrahl, so schneidet diese die beiden Parallelen in zwei Punkten P_1 und P_2 der Kurve m.

Unter den zur ξ-Achse parallelen Geraden wollen wir einige spezielle und die denselben entsprechenden Kurven m betrachten.

α) Für $c = n$ geht die Gleichung 24) über in:

$$x^2 (x^2 + y^2) - n^2 y^2 = 0;$$

demnach entspricht der Geraden μ für $c = n$ die Kappakurve, welche den Koordinatenursprung O als Mittelpunkt und die Geraden $x = + n$ und $x = - n$ als Asymptoten hat. Durch Anwendung der in Fig. 5 durchgeführten Konstruktion können wir die Kappakurve in folgender Weise zeichnen:

In Fig. 20 ist um den Anfangspunkt $\mathfrak{O}$ der Kreis $\mathfrak{k}$ mit dem Radius n beschrieben und zwei aufeinander senkrechte Durchmesser $\mathfrak{AB}$ und $\mathfrak{CD}$ dieses Kreises gezeichnet. Zieht man durch die Endpunkte des einen Durchmessers Parallele zu der y-Achse, so schneiden diese den anderen Durchmesser in zwei Punkten P_1 und P_2 der Kappakurve. Jedes Durchmesserpaar ergibt in dieser Weise vier Punkte derselben.

Diese Konstruktion geht aus der von Barrow[1]) angegebenen dadurch hervor, daß wir an der zitierten Stelle das Dreieck OAB in die Lage $\mathfrak{AO}P_3$ von Fig. 20 bringen.

β) Der Geraden $\eta = 2n$ entspricht die zu der Singularkurve o in bezug auf die x'-Achse symmetrische Kurve:

$$y'^4 - x'^4 - 4 n y' x'^2 = 0.$$

b) Eine durch den Koordinatenursprung Ω gehende Gerade sei gegeben durch die Gleichung:

$$\eta = k \cdot \xi.$$

In Fig. 5 sei ΩA dieser gegebene Fahrstrahl mit dem Richtungswinkel ψ gegen die ξ-Achse. Dem Punkt Ω des Fahrstrahles entspricht zunächst die Singularkurve. Zu einem beliebigen anderen auf dem Fahrstrahl gelegenen Punkt A ergeben sich nach der in der Figur ausgeführten Konstruktion zwei Punkte A_1 und A_2 als zugeordnete Punkte. Sind x_1, y_1 und x_2, y_2 die laufenden Koordinaten der Punkte A_1 bzw. A_2, so lassen sich aus der Figur folgende Beziehungen ablesen:

[1]) Loria, a. a. O., S. 184.

$$y_1 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1 - \mathfrak{P}_1 A_1 = x_1 \cdot \operatorname{tg}\psi - \frac{n}{\sin\psi}$$

$$y_2 = \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{P}_2 A_2 = x_2 \cdot \operatorname{tg}\psi + \frac{n}{\sin\psi}.$$

Diese beiden Gleichungen stellen die zu dem gegebenen Fahrstrahl parallelen Tangenten an die Hüllbahnkurve h dar. Somit erhalten wir folgenden Satz:

Einer durch den Koordinatenursprung gehenden Geraden des Systems Σ entsprechen in S die Singularkurve o und die beiden zu der Geraden parallelen Tangenten an die Kurve h.

Dieseses Resultat spezialisieren wir für die beiden Koordinatenachsen ξ und η und erhalten folgende Beziehungen:

Der η-Achse des Systems Σ entsprechen in S die Singularkurve o und die y-Achse als doppelt zählende Gerade.

Der ξ-Achse des Systems Σ sind in dem System S die Singularkurve o und außerdem die unendlich ferne Gerade doppelt zugeordnet.

§ 10.

Die Kurvenschar in dem System S, welche einer Schar konzentrischer Kreise in dem System Σ entspricht.

In dem System Σ sei eine um den Koordinatenursprung Ω als Mittelpunkt beschriebene Schar konzentrischer Kreise gegeben; es soll die dieser Kreisschar σ entsprechende Kurvenschar s in dem System S gefunden werden.

Ist ϱ der Radius eines beliebigen Kreises der Schar σ, so hat dieselbe die Gleichung:

$$\xi^2 + \eta^2 = \varrho^2.$$

Mit Hilfe der Gleichungen 6′) geht diese Gleichung über in:

$$q + \frac{n}{\cos\vartheta} = \pm\,\varrho.$$

Die Gleichung der Kurvenschar s, welche der Kreisschar σ entspricht, geht demnach durch Elimination von q und ϑ aus den folgenden drei Gleichungen hervor:

*

$$x = (n + q) \sin \vartheta$$

$$y = (n +) \cos \vartheta - \frac{n}{\cos \vartheta}$$

$$q + \frac{n}{\cos \vartheta} = \pm \varrho.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\cos \vartheta = \lambda$, so ergibt die dritte dieser Gleichungen zusammen mit der ersten bzw. zweiten die beiden Gleichungen

$$(n \pm \varrho)^2 \lambda^4 - 2n(n \pm \varrho)\lambda^3 + (x^2 \mp 2n\varrho - \varrho^2)\lambda^2 + 2n(n \pm \varrho)\lambda - n^2 = 0$$

und

$$(n \pm \varrho)\lambda^2 - (n + y)\lambda - n = 0.$$

Durch Elimination von λ aus diesen zwei Gleichungen erhalten wir folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} (n\pm\varrho)^2 & -2n(n\pm\varrho) & x^2\mp 2n\varrho-\varrho^2 & 2n(n\pm\varrho) & -n^2 & 0 \\ 0 & (n\pm\varrho)^2 & -2n(n\pm\varrho) & x^2\mp 2n\varrho-\varrho^2 & 2n(n\pm\varrho) & -n^2 \\ n\pm\varrho & -(n+y) & -n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n\pm\varrho & -(n+y) & -n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n\pm\varrho & -(n+y) & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n\pm\varrho & -(n+y) & -n \end{vmatrix} = 0.$$

Die Ausrechnung dieser Determinante liefert folgende Gleichung der Kurvenschar s:

$$25) \quad \begin{aligned} &(n + y)^4 \pm 2\varrho(n + y)^3 \pm 8n\varrho(n \pm \varrho)(n + y) \\ &+ 2(2n \pm \varrho)(n + y)(x^2 \mp 2n\varrho - \varrho^2) - (x^2 \mp 2n\varrho - \varrho^2)^2 \\ &+ 4n\varrho^2(n \pm \varrho) = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir voraus, daß der Radius ϱ stets positiv zu nehmen ist, so erkennen wir aus Gleichung 25), daß die Kurvenschar s aus zwei Teilscharen s' und s'' besteht, welche dargestellt sind durch

$$25') \quad \begin{aligned} &(n + y)^4 + 2\varrho(n + y)^3 + 8n\varrho(n + y)(n + \varrho) \\ &+ 2(2n + \varrho)\cdot(n + y)(x^2 - 2n\varrho - \varrho^2) - (x^2 - 2n\varrho - \varrho^2)^2 \\ &+ 4n\varrho^2(n + \varrho) = 0 \end{aligned}$$

und

$$25'') \quad \begin{aligned} &(n + y)^4 - 2\varrho(n + y)^3 - 8n\varrho(n - \varrho)(n + y) \\ &+ 2(2n - \varrho)(n + y)(x^2 + 2n\varrho - \varrho^2) - (x^2 + 2n\varrho - \varrho^2)^2 \\ &+ 4n\varrho^2(n - \varrho) = 0. \end{aligned}$$

Einfacher werden diese Gleichungen, wenn wir auf die Gleichung 25′) die Koordinatentransformation

$$x = x', \qquad y = y' - (n+\varrho)$$

und auf die Gleichung 25″) die Transformation

$$x = x'', \qquad y = y'' - (n - \varrho)$$

anwenden. Wir erhalten dann die Gleichungen der Teilscharen s', bzw. s'' in folgender Form:

$25^a)$ $\quad y'^4 - x'^4 + 2y'\,[(2n + \varrho)x'^2 - \varrho \cdot y'^2] = 0.$

$25^b)$ $\quad y''^4 - x''^4 + 2y''\,[(2n - \varrho)x''^2 + \varrho \cdot y''^2] = 0.$

Die beiden Scharen s' und s'' bestehen also aus Kurven von der vierten Ordnung, welche den Punkt $x = 0$, $y = -(n+\varrho)$ bzw. $x = 0$, $y = -(n-\varrho)$ als dreifachen Punkt besitzen. Derselbe ist für die Teilschar s' stets reell und hat die Tangentenrichtungen:

$$y' = 0 \text{ und } \frac{y'}{x'} = \pm\sqrt{\frac{\varrho - 2n}{\varrho}},$$

für die Teilschar s'' sind sämtliche drei Zweige nur dann reell, wenn $\varrho > 2n$, und haben dann die Richtungen:

$$y'' = 0 \text{ und } \frac{y''}{x''} = \pm\sqrt{\frac{\varrho - 2n}{\varrho}},$$

für $\varrho < 2n$ ist nur der Zweig mit der x''-Achse als Tangente reell, die beiden anderen sind imaginär. Die beiden dreifachen Punkte der einem Kreis $\varkappa$ der Schar σ entsprechenden Kurven k' und k'' der Scharen s' bzw. s'' haben die Entfernung 2ϱ. Die y-Achse schneidet die beiden Kurven noch je in einem vierten Punkt, und die Kurven liegen so, daß dieser vierte Punkt der einen Teilkurve sich mit dem dreifachen Punkt der anderen deckt. Die Kurven der Schar s gehen außerdem durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte und haben die beiden Geraden $y' = \pm x' - n$ bzw. $y'' = \pm x'' - n$ als Asymptoten.

Ein Analogon zu den Kurven der Schar s erwähnt Cramer[1]) ohne Ausführung einer Konstruktion derselben.

Die in Fig. 5 durchgeführte Konstruktion der einem Punkt des Systems Σ entsprechenden Punkte in dem System S wenden

[1]) Cramer, a. a. O., S. 327.

wir nun darauf an, in Fig. 21a) und 21b) zu einem Punkt **K** eines Kreises $\varkappa$ der Schar σ die beiden entsprechenden Punkte K_1 und K_2 in dem System S zu konstruieren und erhalten damit eine einfache Beziehung, um die beiden dem Kreis $\varkappa$ entsprechenden Teilkurven k' und k'' punktweise zu zeichnen.

In Fig. 21a und 21b sind für die beiden Endpunkte **K** und **K'** eines Kreisdurchmessers die Konstruktionen mit derselben Bezeichnung wie in Fig. 5 durchgeführt.

Von den beiden Punkten K_1 und K_2 gehört stets der eine der Kurve k', der andere der Kurve k'' an.

In Fig. 21a wurde die Konstruktion für den Fall $\varrho > 2n$, in Fig. 21b für den Fall $\varrho < 2n$ durchgeführt.

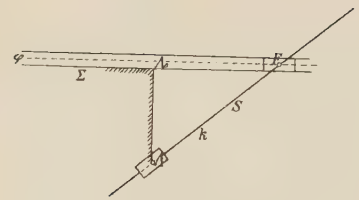
Es soll noch eine zweite Konstruktion der beiden Kurven k' und k'' erwähnt werden, die wir aus der Singularkurve o ableiten können. In Polarkoordinaten R und ψ lauten nämlich die Gleichungen der Kurvenscharen s' und s'':

$$25^{\alpha}) \qquad r' = 2n \operatorname{tg} 2\psi \cos\psi + 2\varrho \sin\psi,$$

$$25^{\beta}) \qquad r'' = 2n \operatorname{tg} 2\psi \cos\psi - 2\varrho \sin\psi.$$

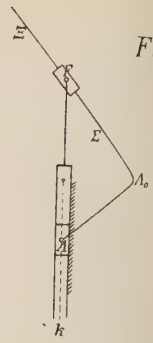
Aus diesen Gleichungen und der Gleichung 13) auf Seite 24 ersehen wir, daß der Radiusvektor eines Punktes der Kurven k' bzw. k'' sich zusammensetzt aus den Radienvektoren des zu demselben Winkel ψ gehörenden Punktes der Singularkurve o und des Punktes auf dem in Fig. 21a gezeichneten Kreis $\mathfrak{K}$, welcher die Entfernung der beiden dreifachen Punkte als Durchmesser besitzt. Ist die Singularkurve in dem Achsensystem $x'y'$ bzw. $x''y''$ gezeichnet, so schneidet ein beliebiger Fahrstrahl durch den Koordinatenursprung dieselbe, sowie den eben erwähnten Kreis $\mathfrak{K}$ in je einem Punkt, und durch Addition bzw. Subtraktion der Radienvektoren dieser beiden Punkte erhalten wir einen Punkt der dem Kreis $\varkappa$ entsprechenden Kurve k' bzw. k''.

Fig.1a.



Zentrisch-geradliniges Schleifschiebergetriebe.

Fig.1b.



Zentrisch-winkeliges Schleifschiebergetriebe.

Fig.2.

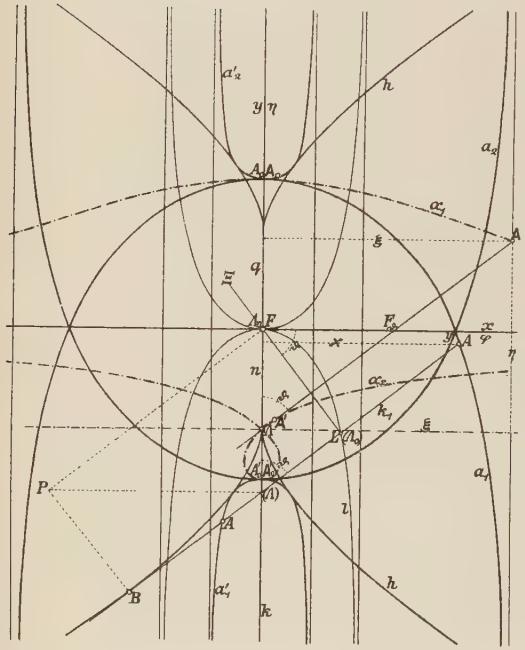


Fig.3.

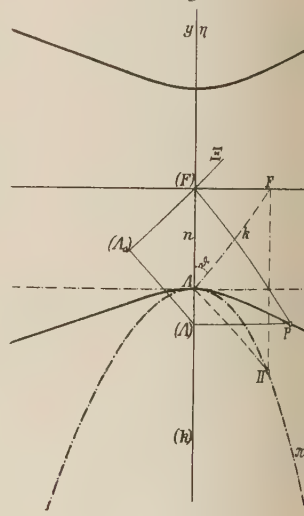


Fig.4.

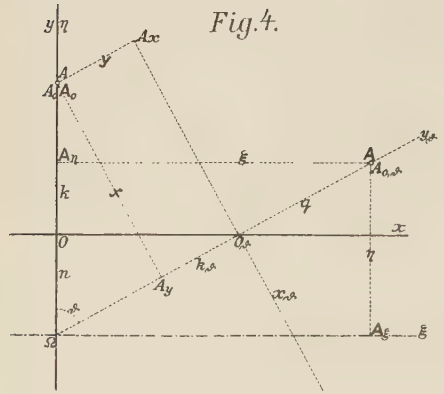
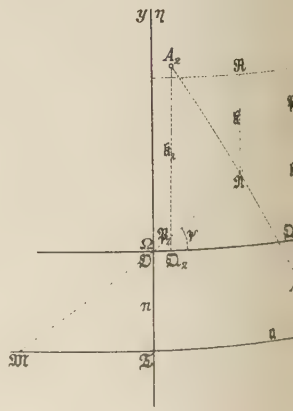


Fig.5.



Lith. Anst. v. Hubert Köhler München

Fig.6.

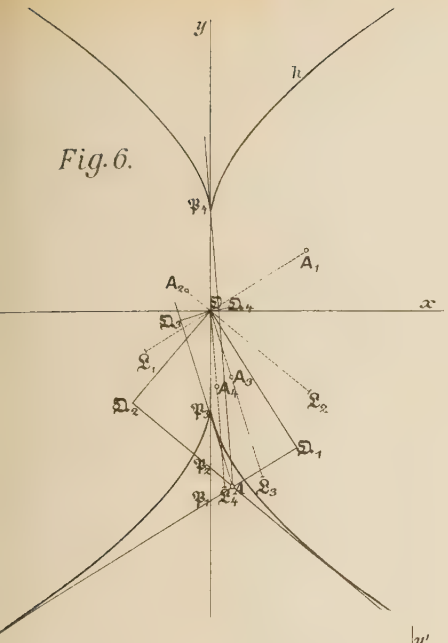


Fig.8.

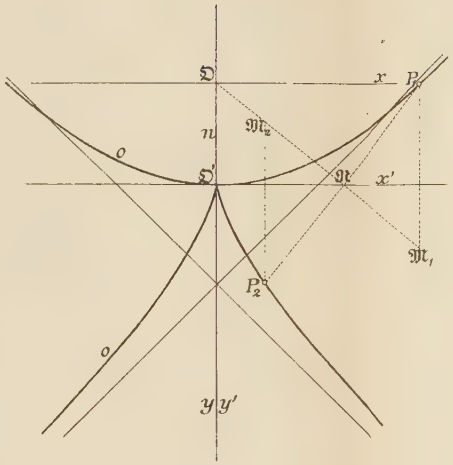


Fig.10.

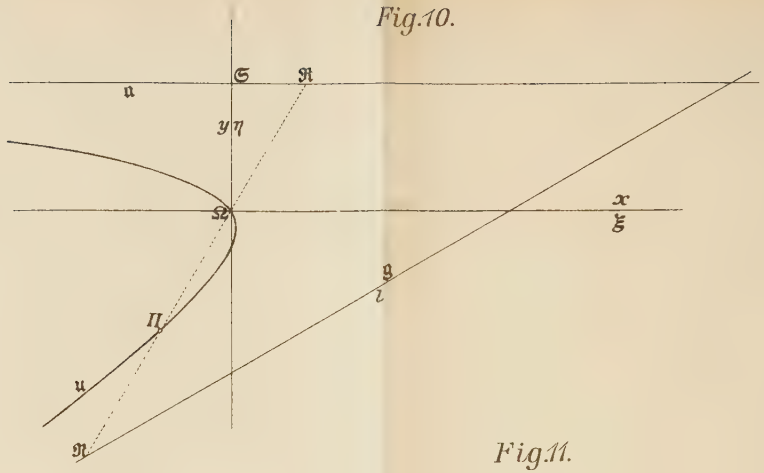


Fig.7.

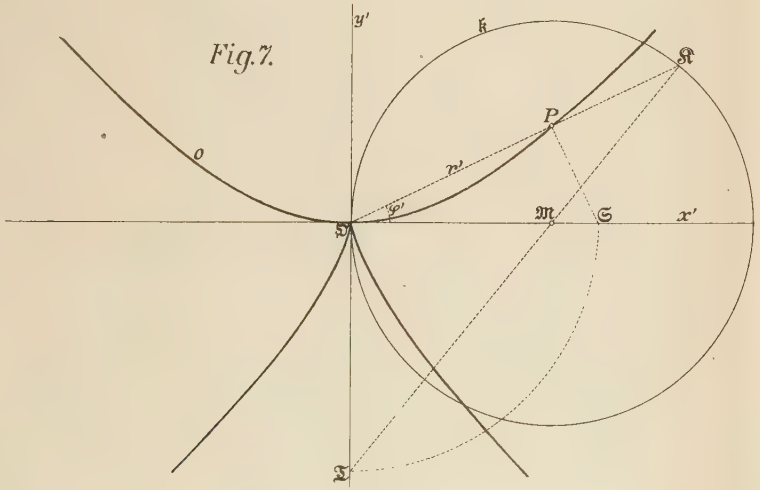


Fig.11.

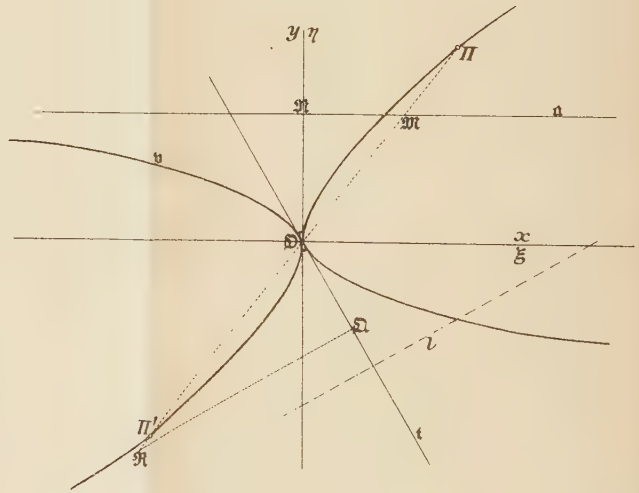


Fig.9.

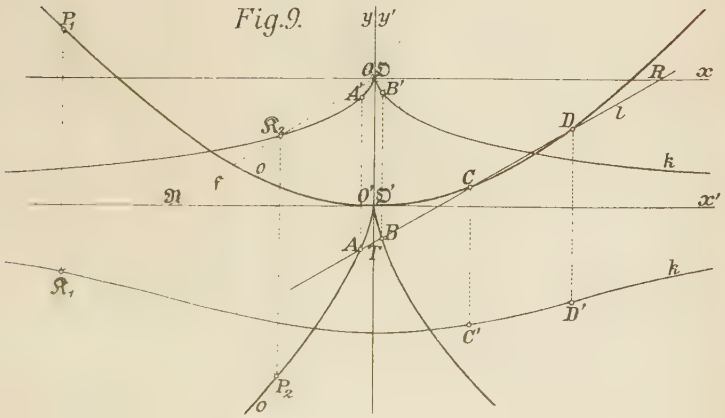


Fig.12.

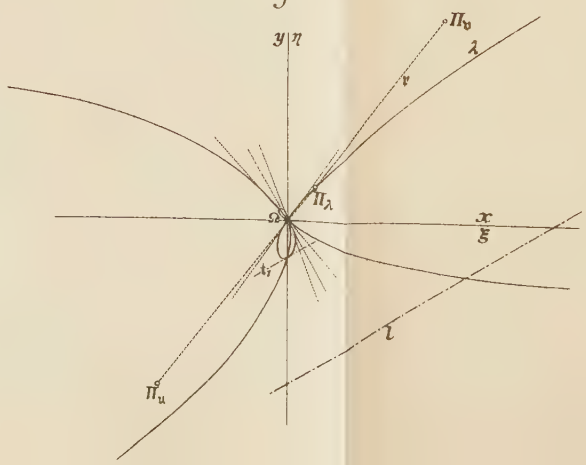


Fig.13.

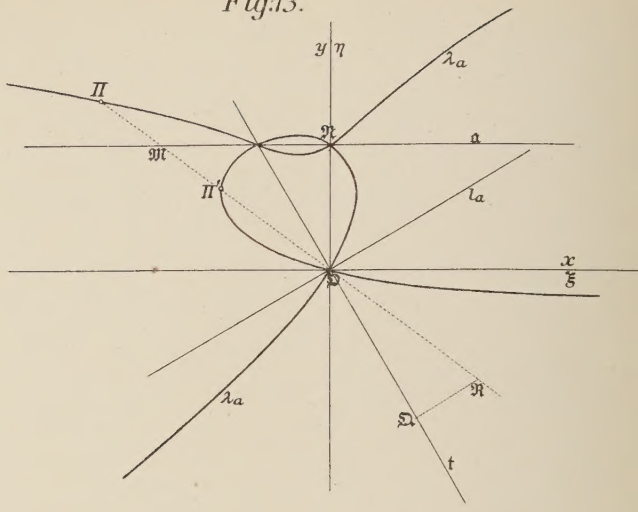


Fig.14.

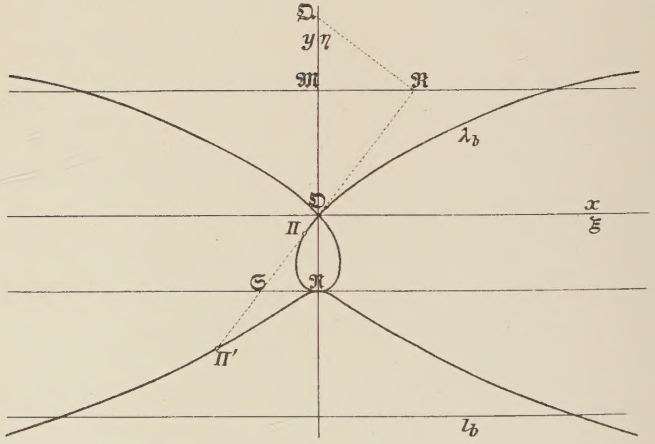
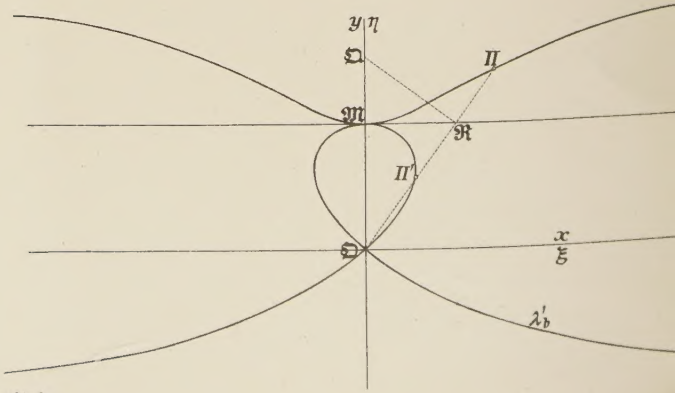


Fig.15.



Lith. Anst. v. Hubert Kühler, München

Fig.16.

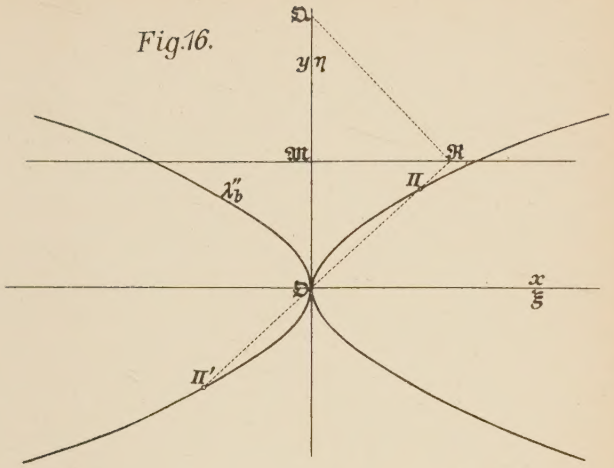


Fig.17.

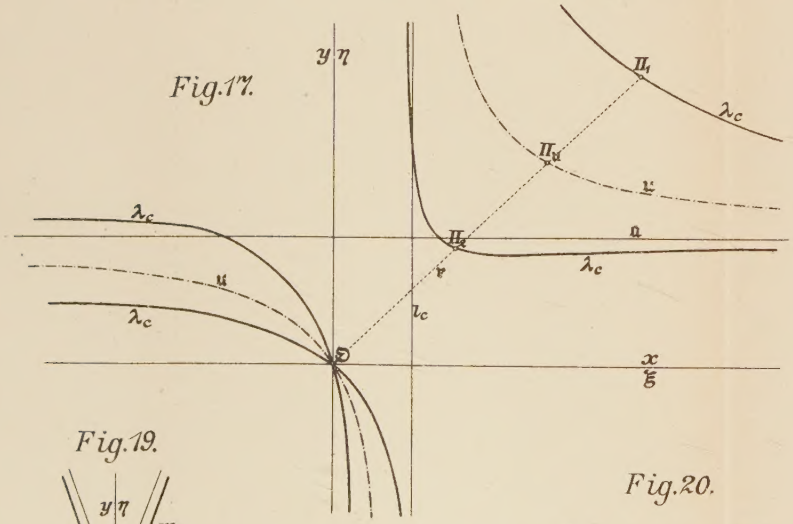


Fig.18.

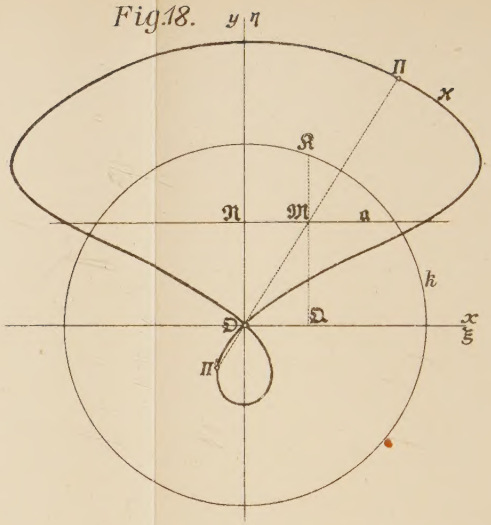


Fig.19.

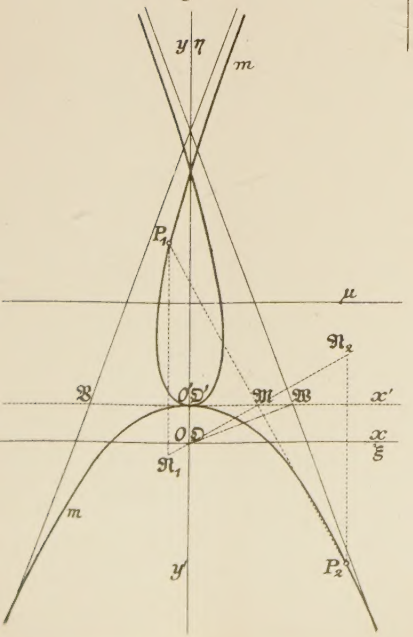


Fig.20.

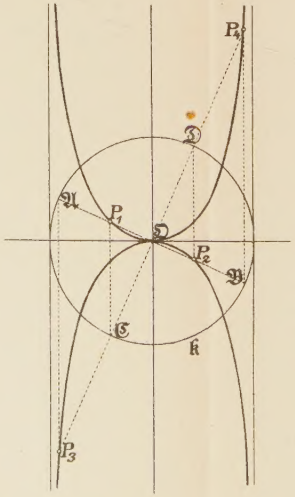


Fig.21a.

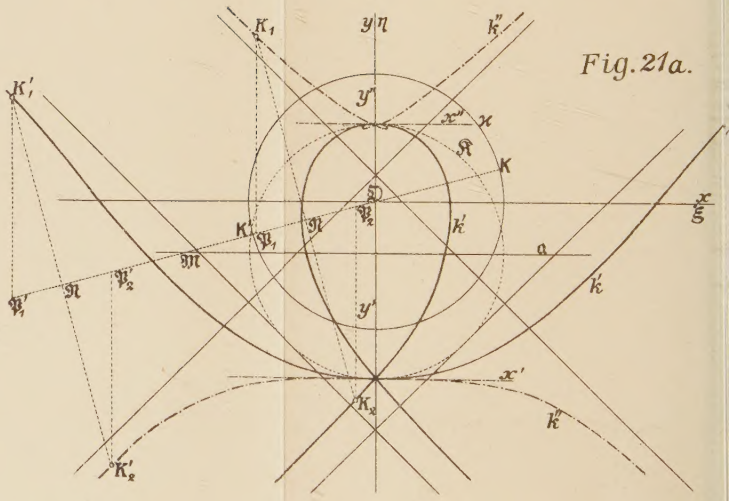
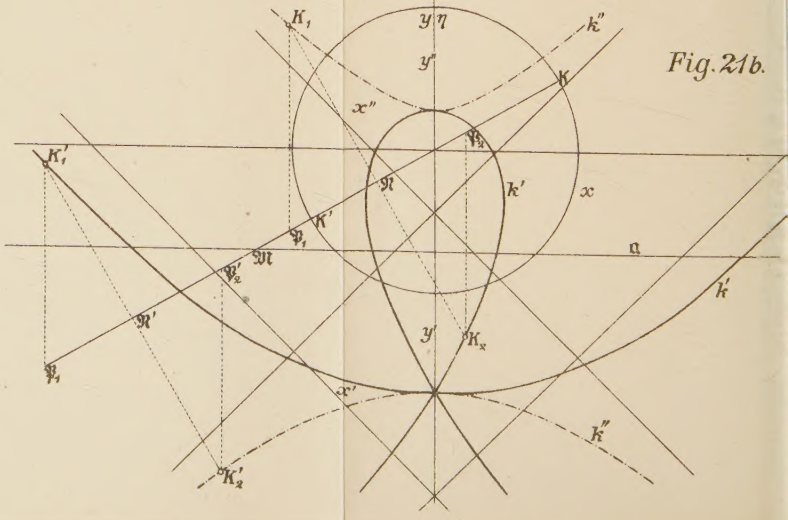



Fig.21b.